

第六讲 二次型

(1) 二次型的标准型

(2) 二次型正定性

(一) 二次型的概念

定义 n 个自变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个二次齐次多项式函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

称为 x_1, x_2, \dots, x_n 的一个 n 元二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 = x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 \\ = x_1(x_1 + 3x_2) + x_2(3x_1 + 5x_2) \\ = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T A x$$

↑
二次型的矩阵表示

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x \leftarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

↑
 $A^T = A$

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 14x_2x_3$$

$$x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

标准型：只有平方项（即混合项的系数为0）的二次型也就是二次型矩阵为对角矩阵的二次型。

$$x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$$

规范型：形如

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \text{ 的二次型}$$

$$\text{规范型} \quad y_1^2 - y_2^2 \quad -y_2^2 - y_3^2$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

定理：任一个 n 元二次型都可以通过坐标变换化成标准型。 $x^T A x \xrightarrow{\exists x = cy} y^T \Lambda y$

坐标变换

若C是正交矩阵称为正交变换配方法要求C可逆。

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{cases} \quad |c| \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

可逆

$$\downarrow$$

$$x = cy$$

若C是正交矩阵称为正交变换，配方法要求C可逆。

定理：任一个 n 元二次型都可以通过坐标变换化成标准形。

$$x^T A x \xrightarrow{\exists x = cy} y^T \wedge y$$

1. 正交变换

2. 会配方法

定理：任一个 n 元二次型都可以通过坐标变换化成标准形。

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x \xrightarrow{x = cy} (Cy)^T A (Cy)$$

$$= y^T (C^T A C) y = y^T B y$$

\uparrow

$$B = C^T A C$$

$$B^T = (C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C = B \quad B \text{ 对称}$$

\uparrow

$$A^T = A$$

合同：设A和B是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶可逆矩阵C，使得 $C^T A C = B$ ，则称A与B合同，记作 $A \sim B$

1. 合同 $B = C^T A C$

2. 相似 $B = P^{-1} A P$

3. 等价

若 $x = Cy$ 是正交变换，即 C 是正交矩阵，那么 $C^T = C^{-1}$

$$B = C^T A C = C^{-1} A C$$

所以 A 与 B 不仅合同而且相似。

1. 选择正交变换

2. 选择配方法

$$x^T A x \xrightarrow{\exists x = Cy} y^T \Lambda y \quad (\text{标准形})$$

即 A 与 Λ 合同，

若用正交变换 $x = Cy$ 化为标准形。则 A 合同于 Λ ， A 与 Λ 相似

↑
A 的特征值

当给出二次型，要求用正交变换化成标准型，
标准型平方项的系数就是 A 的特征值。

若 A 的特征值是 1, 3, 5，则 $x^T A x = y_1^2 + 3y_2^2 + 5y_3^2$
↑
 正交变换

例1 二次型 $\alpha(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换化 $6y_1^2$ ，则 $\alpha =$.

$$f = 6y_1^2 = 6y_1^2 + 0y_2^2 + 0y_3^2 \Rightarrow A \text{ 的特征值是 } 6, 0, 0.$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \alpha + \alpha + \alpha = 6 + 0 + 0 \\ \sum a_{ii} = \sum \lambda_i \end{array} \quad \alpha = 2$$

二次型的标准形中，正平方项的个数称为二次型的正惯性指数 p ，负平方项的个数称为二次型的负惯性指数 q 。

$$f = 6y_1^2, \quad p=1, \quad q=0 \quad x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 \quad p=2, \quad q=1$$

二次型的秩 $r(f) = r(A) = p + q$

定理（惯性定理）二次型 $x^T A x$ 经坐标变换，其正负惯性指数是唯一确定的。

$$f \longrightarrow \begin{array}{l} y_1^2 + 2y_2^2 \\ \searrow \\ 3y_2^2 + 5y_3^2 \end{array} \quad p=2, \quad q=0$$

二次型的秩 $r(f) = r(A) = p + q$

定理（惯性定理）二次型 $x^T A x$ 经坐标变换，其正负惯性指数是唯一确定的。

$$f \longrightarrow \begin{array}{l} y_1^2 + 2y_2^2 \\ \searrow \\ 3y_2^2 + 5y_3^2 \end{array} \quad p=2, \quad q=0$$

定理：二次型的规范型惟一。

用正交变换化二次型为标准形

(1) 写出二次型矩阵A

(2) 求A的特征值、特征向量

(3) 单位化（正交化？）

(4) 构造正交矩阵P、Q。

(5) 令 $x = Py$ 得 $x^T Ax = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

注意 (2) - (3) - (4) 三步与实对称矩阵时，完全一样。

例2. 用正交变换化二次型 $x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ 为标准形，并写出所用坐标变换。

[解] 二次型矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-5 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & 2(\lambda-5) & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda-5)(\lambda-6) \end{aligned}$$

得到A的特征值是：0, 5, 6。

[解] 当 $\lambda = 0$ 时, $(0E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解出 $X_1 = (5, -1, 2)^T$ 是 $\lambda = 0$ 的特征向量。

当 $\lambda = 5$ 时，由 $(5E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到 $\lambda = 5$ 的特征向量 $X_2 = (0, 2, 1)^T$

当 $\lambda = 6$ 时, 由 $(6E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到 $\lambda = 6$ 的特征向量 $X_3 = (1, 1, -2)^T$

[解]单位化得

$$\alpha_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \frac{X_3}{\|X_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\text{那么经坐标变换 } x = Py, \quad P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 5 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$$

$$x^T Ax = 5y_2^2 + 6y_3^2 \quad \swarrow$$

$$(2) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x^T x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$$

$$x^T x = (Py)^T (Py) = y^T P^T Py = y^T y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$$

$$x^T Ax = 5y_2^2 + 6y_3^2 \leq 6y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 \quad y_1 = 0, y_2 = 0 \text{ 等号成立。}$$

$$\therefore f_{\max} = 12$$

$$\text{极大值点} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad P = (0, 0, -\sqrt{2})^T \text{ 也是极大值点。}$$

例3 若二次型 $x^T Ax = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_2x_3 + 2x_1x_3$ 的秩为2, $(0, 1, 0)^T$ 是A的特征向量, 求正交变换化二次型为标准形。

解: 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$$

设 $X_1 = (0, 1, 0)^T$ 是A属于特征值 λ 的特征向量

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ \lambda=1 \\ b=0 \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二次型矩阵A的特征多项式为：

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[(\lambda-1)^2 - 1] = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

所以A的特征值：1, 0, 2。

解：或 由 $r(A) = 2$ 知 $|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 为A的一个特征值。

$\lambda = 1$ $(0,1,0)^T$ 是他的一个特征向量。

由 $1+0+\lambda_3 = 1+1+1$ 得 $\lambda_3 = 2$

对 $\lambda = 0$ ，由 $(0E - A)x = 0$ 得

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = (1, 0, -1)^T$$

对 $\lambda = 2$ ，由 $(2E - A)x = 0$ 得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = (1, 0, 1)^T$$

单位化得

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

那么经坐标变换 $x = Py$ 得 $x^T A x = y_1^2 + 2y_3^2$

例4 二次型 $x_1^2 + a x_2^2 + x_3^2 + 2b x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$ 经正交变换 $x = py$ 化为标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$ ，求 a, b 的值及正交矩阵 P 。

解：二次型矩阵与标准形矩阵分别是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

所以 $A \sim \Lambda$

由 $\sum a_{ii} = \sum \lambda_{ii}$ 得 $1+a+1=0+1+4 \Rightarrow a=3$

$$\text{又 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(b-1)^2 = 0 \Rightarrow b=1$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ A的特征值是 } 0, 1, 4.$$

由 $(0E - A)x = 0$ 得 $X_1 = (1, 0, -1)^T$

由 $(E - A)x = 0$ 得 $X_2 = (1, -1, 1)^T$

解：由 $(4E - A)x = 0$ 得 $X_3 = (1, 2, 1)^T$

单位化得

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故正交矩阵为 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

（三）用配方法化二次型为标准型

原则：配方时每次把一个大写字母处理干净。

例5 用配方法化二次型 $x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ 为标准形，并写出所用坐标变换。

解： $f = x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2$
 $= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
 $= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ C^{-1}

得 $x^T Ax = y_1^2 + y_2^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

令 $y_3 = x_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否可逆？ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例6 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2$ 的正负惯性指数。

解：令
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases} \quad \text{得 } f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \Rightarrow p=3, \quad q=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{此解法错误!!}$$

↑
可逆吗？

解： $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

配方法：

$$\begin{aligned} &= 2 \left[x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + \frac{(x_2 + x_3)^2}{4} \right] - \frac{(x_2 + x_3)^2}{2} + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - 3x_2x_3 \\ &= 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - x_3)^2 \end{aligned}$$

故 $p=2, \quad q=0$

特征值法：二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)^2$$

A的特征值：3, 3, 0。

故 $p=2, \quad q=0$

（四）正定二次型

定义 对二次型 $x^T Ax$ ，若对任何 $x \neq 0$ ，恒有 $x^T Ax > 0$ ，则称二次型 $x^T Ax$ 是正定二次型，并称此二次型矩阵为正定矩阵。

定理 n 元二次型 $x^T Ax$ 正定的充分必要条件：

- (1) A的特征值全大于0；
- (2) 正惯性指数 $p=n$ ；
- (3) 顺序主子式全大于0；
- (4) $A = C^T E C$ ，其中C可逆，即A与E合同。

定理 n 元二次型 $x^T Ax$ 正定的必要条件：

- (1) $a_{ii} > 0 \quad \forall i$ ；
- (2) $|A| > 0$ 。

例 (1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$

取 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ ，有 $f(0,0,1) = -1 \quad \therefore f$ 不正定。

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3$

取 $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ ，有 $f(0,0,1) = 0 \quad \therefore f$ 不正定。

例7 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的正定性。

解：顺序主子式法。二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\Delta_1 = a_{11} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_3 = |A| = 10$$

$$\because \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0$$

$\therefore f$ 是正定二次型。

解：特征值法。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

A 的特征值 1, 1, 10。

$\therefore f$ 是正定二次型。

方法三。

$$\begin{aligned} f &= 2 \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2 \right] - 2(x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3 \left[x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + \left(\frac{2}{3}x_3 \right)^2 \right] - \frac{4}{3}x_2^2 + 3x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3 \left(x_2 - \frac{2}{3}x_3 \right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

$\therefore f$ 是正定二次型。

例8. 二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 正定, 则 t ——

[解] 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{顺序主子式应全大于0, 即}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 \stackrel{\Delta}{>} 0 \quad t \in (-2, 2)$$

$$\Delta_3 = |A| = -4(t^2 + t - 2) \stackrel{\Delta}{>} 0 \quad t \in (-2, 1)$$

可见 $t \in (-2, 1)$ 时, 顺序主子式全大于0, 即正定。

例9. 已知 A 与 $A - B$ 均是正定矩阵, 证明 $E - A^{-1}$ 是正定矩阵。

[证] 要证一个矩阵是正定矩阵要从两个方面入手:

如果二次型是正定二次型, 那么二次型的矩阵就叫做正定矩阵

1. 是否是对称阵

2. 证明其正定性

$$(\text{特征值法}) \quad (1) \quad (B - A^{-1})^T = B^T - (A^{-1})^T = B - (A^T)^{-1} = B - A^{-1}$$

故 $B - A^{-1}$ 是对称矩阵

(2) 设 A 的特征值是 λ , 那么 $A - B$ 的特征值是 $\lambda - 1$, $B - A^{-1}$ 的特征

$$\text{值是 } 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

由 $A, A - B$ 正定, 知 $\lambda > 0, 1 - \lambda > 0$ 。故 $B - A^{-1}$ 的特征值大于0。

所以 $B - A^{-1}$ 正定

例10. 设 A 为3阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = 0$, 已知 A 的秩 $r(A) = 2$

(1) 求 A 的全部特征值

(2) 当 k 为何值时, 矩阵 $A + kE$ 为正定矩阵, 其中 E 为3阶单位矩阵

[解] (1) 设 λ 是 A 的任一特征值, X 是属于 λ 的特征向量。即 $AX = \lambda X, X \neq 0$

$$\text{由于 } A^2 X = \lambda^2 X \quad \text{有 } (A^2 + 2A)X = (\lambda^2 + 2\lambda)X = 0, \quad X \neq 0$$

$$\text{故 } \lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad \text{从而 } \lambda = 0, \lambda = -2$$

因为 A 是实对称矩阵必可对角化, 又 $r(A) = 2$

$$(1) \quad A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

因此A的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$

(2) 显然 $A + kE$ 是实对称矩阵, 由 (1) 可知 $A + kE$ 的特征值为

$$k-2, \quad k-2, \quad k$$

于是, 当 $k > 2$ 时, $A + kE$ 的特征值大于零。因此 $A + kE$ 正定。

例11 已知A是正定矩阵, 证明 $|A + E| > 1$.

[证] 因为A正定, 故A的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 全大于0,

又 $A + E$ 的特征值为 $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1$,

从而 $\lambda_i + 1 > 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

那么 $|A + E| = \prod (\lambda_i + 1) > 1$

例12 已知A是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = n$, 证明 $A^T A$ 正定

[证] (定义法) (1) $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$, 知 $A^T A$ 是对称矩阵.

(2) $\forall x \neq 0$ (要证 $x^T (A^T A)x > 0$)

$$x^T (A^T A)x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0 \quad (\text{需证 } Ax \neq 0)$$

$\begin{matrix} \nearrow \alpha^T \beta & \alpha^T \alpha \\ \uparrow \\ A - m \times n & x - n \times 1 \\ \text{故} & Ax - m \times 1 \end{matrix}$

由于A是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = n$, 故齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

那么只要 $x \neq 0$, 必有 $Ax \neq 0$, 从而 $\|Ax\| > 0$

即 $x^T (A^T A)x$ 是正定二次型, 于是 $A^T A$ 是正定矩阵

例13 设A是n阶正定矩阵,B是n阶反对称矩阵,证明 $A - B^2$ 可逆

$$B^T = -B$$

[证] 因为B是反对称矩阵 $A - B^2 = A + B^T B$

$$(A - B^2)^T = (A + B^T B)^T = A^T + B^T (B^T)^T = A + B^T B$$

$$\begin{aligned} x^T (A - B^2) x &= x^T (A + B^T B) x = x^T A x + (Bx)^T (Bx) > 0 \\ &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \parallel \\ &\quad \quad \quad \text{正定0} \quad \|Bx\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

故 $x^T (A - B^2) x$ 是正定二次型.

从而 $A - B^2$ 的特征值全大于0.

因此 $|A - B^2| > 0$.

即 $A - B^2$ 可逆.

正定

(1) 顺序主子式法

(2) 检验对称性

证明正定性 $\begin{cases} \text{定义法} \\ \text{特征值法} \end{cases}$

注意: $\alpha^T \alpha$ 的含义

(五) 矩阵的等价,相似与合同

A与B等价: A经过初等变换得到B 即 $P_1 \dots P_r A Q_1 Q_2 \dots Q_s$
 $PAQ=B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$ 经过初等变换, 矩阵的秩不变 A,B是同型矩阵

A与B相似: $P^{-1}AP=B$ P可逆 排除法或者相似对角化

A与B合同: $C^T AC=B$ C可逆

由惯性定理, 在经过坐标变换二次型的正、负惯性指数是唯一确定的。

$$\Leftrightarrow p_A = p_B, \quad q_A = q_B$$

例14 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 4 \end{pmatrix}$ 是否相似？是否合同？

(1) A与B不相似：理由，A与B特征值不同

(2) A与B合同：

$$x^T A x = x_1^2 + 2x_2^2 \quad y^T B y = y_1^2 + 4y_2^2 \quad \text{正惯性指数 } P=2, \text{ 负惯性指数 } q=0.$$

$$\text{令 } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \sqrt{2}y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 4 \end{pmatrix}$$

例15 判断 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -4 \end{pmatrix}$ 不合同

\uparrow
 $p=2, q=0$

\uparrow
 $p=1, q=1$

$$\text{若 } C^T A C = B$$

$$|C^T A C| = |C|^2 |A| > 0 \quad \text{而} \quad |B| < 0$$

例16 判断下列矩阵

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

哪些等价,相似,合同? 判断等价检查秩

$$[\text{分析}] \quad r(A) = 1, \quad r(B) = 2, \quad r(C) = 1, \quad r(D) = 1$$

所以 (A),(C),(D) 三个矩阵等价

哪些等价,相似,合同? 判断相似用必要条件排除

[分析] (A),(B)是上三角矩阵,特征值为1,0,0.

(C)是对角矩阵,特征值为1,0,0.

(D)由 $|\lambda E - D| = \lambda^3 - 2\lambda^2$ 知特征值为2,0,0.

那么(D)与(A),(B),(C)不相似 (特征值不同)

(B)与(A),(C)不相似 (秩不相同)

(A)与(C)相似吗?

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



↑
对角矩阵

由于(A)的特征1,0,0.有重根,而 $r(0E - A) = 1 = 3 - 2$
所以(A)能对角化.因此(A),(C)相似.

(C) 与 (D) 合同吗?

判断合同检查正负惯性指数

由于 $p=1, q=0$ 相同,故(C)与(D)合同.

例17 判断

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{是否相似、合同、等价?}$$

[分析] $r(A) = 1, r(B) = 1$ 所以A与B等价.

由 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - 3\lambda^2$ 知A的特征值是3,0,0.

B是对角矩阵,特征值为3,0,0.

由于A是实对称矩阵,A必能对角化.故 $A \sim B$.

若实对称矩阵 $A \sim B \Rightarrow A$ 与 B 有相同的特征值

$\Rightarrow A$ 与 B 有相同的正、负惯性指数

$\Rightarrow A$ 与 B 合同. 实对称矩阵只要相似一定合同

但 A 与 B 合同 $\nRightarrow A$ 与 B 相似.

第六讲 练习题

练习

1. 已知二次型 $5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ 的秩为2,

求c并用正交变换化二次型为标准形.

[解] 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & c \end{bmatrix}$$

因为 $r(f) = 2$, 即 $r(A) = 2$, 所以 $|A| = 0$. 算出 $|A| = 24(c - 2)$

故 $c = 2$.

由A的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda - 5 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 6)^2$$

可得到A的特征值是6,6,0.

由 $(6E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到特征向量 $X_1 = (1, 1, 0)^T, X_2 = (2, 0, 1)^T$

得到特征向量 $X_3 = (-1, 1, 2)^T$

对 X_1, X_2 经 Schmidt 正交化, 有

$$\beta_1 = X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = X_2 - \frac{(X_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

再把 β_1, β_2, X_3 单位化

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{那么 令 } Q = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

, 以 $x = Qy$ 有 $x^T A x = y^T B y = 6y_1^2 + 6y_2^2$

2. 已知A是n阶正定矩阵, 证明A的伴随矩阵是正定矩阵.

1. 检验对称性

2. 证明正定性

[证] 因为A是正定矩阵, 所以A是可逆的对称矩阵, 又 $A^* = |A|A^{-1}$ 故

$$(A^*)^T = (|A|A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T = |A|(A^T)^{-1} = |A|A^{-1} = A^*$$

即 A^* 是对称矩阵 ($(A^*)^T = (A^T)^*$).

若 λ 是A的特征值, 则 A^* 的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda}$, 由于A正定, 有 $\lambda > 0$, $|A| > 0$.

故 A^* 的特征值 $\frac{|A|}{\lambda} > 0$, 所以 A^* 正定.

练习

3. 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 \quad (b > 0)$$

其中二次型矩阵A的特征值之和为1, 特征值之积为-12.

(1) 求a, b的值

(2) 用正交变换把二次型f化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵

[解] (1) 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

特征值的和等于A主对角线元素之和
 $\sum \lambda_i = 1 = a + 2 + (-2) \quad a = 1$

特征值的积等于A的行列式的值
 $\prod \lambda_i = -12 = |A| = 2(-2a - b^2) \quad b = 2 \quad (b > 0)$

(2) A的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3)$$

对 $\lambda = 2$ 由 $(2E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda = -3$ 由 $(-3E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

单位化

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad P = (y_1 y_2 y_3) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

经坐标变换 $x = Py$, 有 $f = x^T A x = y^T \Lambda y = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$

练习

4. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $|A| < 0$,

证明: 存在 n 维列向量 x_0 使得 $x_0^T A x_0 < 0$

[证] $\because |A| < 0 \therefore r(A) = n$ 又 A 是实对称矩阵, 知二次型 $f = x^T A x$ 的秩为

n , 则不定 (理由?) 经坐标变换 $x = Cy$ 化 f 为规范形有 n 项。

因为正定二次型的必要条件是 A 行列式大于零

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2$$

($\because f$ 不定, $p < n$, 又 $r(A) = n, \therefore q = n - p > 0$)

取 $y_0 = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$, 有 $f(y_0) = -1 < 0$

那么 $x_0 = Cy_0 \neq 0$ ($\because C$ 可逆, 若 $Cy_0 = 0 \Rightarrow y_0 = C^{-1}0 = 0$ 矛盾)

而 $x_0^T A x_0 = y_0^T C^T A C y_0 = y_0^T \Lambda y_0 = -1 < 0$

即有 $x_0 \neq 0$, 而 $x_0^T A x_0 < 0$

练习

4. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $|A| < 0$,

$r(A) = n$

二次型不定 $p < n$

证明: 存在 n 维列向量 X_0 使得 $X_0^T A X_0 < 0$

掌握二次型及其矩阵表示, 了解标准形, 规范形, 合同等概念

掌握用正交变换化二次型为标准形

理解正定概念、性质、会判别。