第五章 特征值与特征向量

要点：求特征值、特征向量；相似及相似对角化；实对称矩阵的特征值和特征向量

（一）特征值、特征向量的计算

定义设A是n 阶矩阵，若有在数 λ 及非零向量 X，使得

$$AX=\lambda X \quad X\neq 0$$

则称 λ 是矩阵A 的特征值，X是矩阵A属于特征值 λ 的特征向量。

计算特征值的方法

（1）定义法

（2）特征多项式 $|\lambda E-A|$ 法

特征向量的求法

（1）定义法

（2）基础解系法 $(\lambda_i E-A)x=0$

若 $AX=\lambda X, X\neq 0$

$\lambda X-AX=0$，即 $(\lambda E-A)X=0 \quad X\neq 0$

于是 X是齐次方程组 $(\lambda E-A)x=0$ 的非零解。

故 $|\lambda E-A|=0$

定义 设 $A=(a_{ij})$ 为一个n阶矩阵，则行列式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

=0，叫矩阵A的特征方程

称为矩阵A的特征多项式，

（λ 的n 次多项式）

对于n阶矩阵A，由

$$|\lambda E-A|=0$$

可求出A的特值 λ_i（共n个）

对每个特征值 λ_i，由

$$(\lambda_i E-A)x=0$$

求基础解系，即 λ_i 的线性无关的特征向量。

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

第一子列

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13}\\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23}\\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

第二子列

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda-|A|$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda-|A|$$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

$$=\lambda^3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \qquad |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

定理 设A是n阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是A的特征值，则

（1）$\sum a_{ii}=\sum \lambda_i$

(2) $|A|=\prod \lambda_i$

若 $r(A)=1$, $|\lambda E-A|=\lambda^3-\left(\sum_{i=1}^{3}a_{ii}\right)\lambda^2=\lambda^2\left(\lambda-\sum a_{ii}\right)$

故A的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii}$，$\lambda_2=\lambda_3=0$

一般地，A为n阶矩阵，$r(A)=1$,

则 $|\lambda E-A|=\lambda^n=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\lambda^{n-1}$

例1 设A是n阶矩阵，所有元素都是1，那么A的n个特征值是 ________。

分析：(1) $|\lambda E-A|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}$

(2) 用特征多项式具体地算：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-n & \lambda-n & \cdots & \lambda-n \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

例2 求 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 的特征值，特征向量。

［解］ 由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ -4 & -5 & \lambda-6 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

所以，A的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=6$。

注意：上三角矩阵、下三角矩阵、对角矩阵的特征值就是主对角线元素。

解 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$ 过程略。

对 $\lambda=6$ 由 $(6E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}5&0&0\\-2&3&0\\-4&-5&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\\ \end{matrix}\quad\begin{matrix}5x_1=0\\-2x_1+3x_2=0\\ \end{matrix}\quad\begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\\ \end{matrix}\quad\begin{matrix}x_1=0\\x_2=0\\x_3\text{自由变量}\end{matrix}$$

$x=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 是 $\lambda=6$ 的特征向量。

$\lambda=6$ 的特征向量是 $kX(k\neq0)$。

例3 求 $A=\begin{bmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{bmatrix}$ 的特征值，特征向量。

[解] 由特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}\ (-1)\text{倍}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\0&18-\lambda&\lambda-18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-17&4&2\\2&\lambda-10&4\\0&0&\lambda-18\end{vmatrix}$$

$$=\ \ldots\ldots$$

$$=(\lambda-18)\begin{vmatrix}\lambda-17&4\\2&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-18)(\lambda^2-27\lambda+162)$$

$$=(\lambda-18)^2(\lambda-9)$$

故A的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=18,\lambda_3=9$（检验：$\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$）

对 $\lambda=9$，由 $(9E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}-8&2&2\\2&-5&4\\2&4&-5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&-5&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=2\Rightarrow x_2=2\Rightarrow x_1=1$

$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 是 $\lambda=9$ 的特征向量，全部的特征向量 $k_1x_1(k_1\neq0)$。

对 $\lambda=18$, 由 $(18E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $X_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, 是 $\lambda=18$ 的线性无关的特征向量；

则 $\lambda=18$ 所有的特征向量 $k_2X_2+k_3X_3$ （k_2k_3不全为0）。

定义法

A	$kA+E$	$A+kE$	A^{-1}	A^*	A^2	$P^{-1}AP$
λ	$k\lambda+1$	$\lambda+k$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ^2	λ
X	X	X	X	X	X	$P^{-1}X$

已知 $AX=\lambda X,\ X\neq 0$

$$(kA+E)X=kAX+X=k\lambda X+X=(k\lambda+1)X$$

$$(A+kE)X=AX+kX=\lambda X+kX=(\lambda+k)X$$

$$AX=\lambda X\Rightarrow X=\lambda A^{-1}X\Rightarrow A^{-1}X=\frac{1}{\lambda}X\Rightarrow$$

$$\frac{A^*}{|A|}X=\frac{1}{\lambda}X\Rightarrow A^*X=\frac{|A|}{\lambda}X$$

$$AX=\lambda X\Rightarrow A^2X=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda^2X$$

例4. 设A是3阶矩阵，特征值为1，2，3。A^* 的特征值?

解： $A+2E$ 的特征值 1+2，2+2，3+2，即3，4，5。

A^2的特征值 $1^2,2^2,3^2$ 即$1,4,9$。

A^{-1}的特征值 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$。

A^* 的特征值 由 $|A|=\prod\lambda_i=1\cdot 2\cdot 3=6$

例4. 设A是3阶矩阵，特征值为1，2，3。$A_{11}+A_{22}+A_{33}=?$

解：

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

A^*特征值之和

因为 A^* 特征值是6，3，2，

$\therefore A_{11}+A_{22}+A_{33}=6+3+2=11$

例5 若 $A^2=A$，求A的特征值

[解] 设λ是A的任一特征值，X是A 属于特征值λ的特征向量，即

$$AX=\lambda X,(X\neq 0) \qquad A^2X=A(\lambda X)=\lambda^2 X$$

因为 $A^2=A$, 故 $\lambda X=\lambda^2 X$

$(\lambda-\lambda^2)X=0$ ，$X\neq 0$

所以 $\lambda-\lambda^2=0$, $\lambda=1$ 或0

例如 A 是单位矩阵（对角矩阵）

$$A^2=A,\ \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},$$

A 的特征值只有1没有0

例如 A 是零矩阵

$$A^2=A,\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

A 的特征值只有0没有1

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

特征值有1也有0

$A^2=A$, $\lambda=1$ 或0

若 $A^2=E$, A 的特征值?

$A^2X=\lambda^2 X \qquad (\lambda^2-1)x=0$

$\therefore\ \lambda$ 为1或-1。

例6 求 $A=\begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$ **的特征值和特征向量**

解

$$A=\begin{bmatrix} n-1 & & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=(n-1)E+B$$

$$\because r(B)=1$$

$$\therefore \left|\lambda E-B\right|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

因此，B的特征值为 $\lambda_1=n, \lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

故A的特征值为 $\lambda_1=2n-1, \lambda_2=\cdots=\lambda_n=n-1$

对于B，若 $\lambda=0$，由 $(0E-B)x=0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$$

$$x_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T$$

……

$$x_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$$

是B属于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，也即是A关于 $\lambda=n-1$ 的特征向量。

$$(nE-B)x=0$$

A 矩阵的秩如果是1，A 可以分解成一个列矩阵和一个行矩阵，并且有 $A^2=lA$。

$$\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}(1\ \ 1\cdots1)\begin{pmatrix}\ \\ \\ \\ \\ \ \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}\ \\ \\ \\ \\ \ \end{pmatrix} \qquad Bx=nx \qquad x\neq 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}(1\ \ 1\cdots1)\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}$$

即 $B\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\1\end{pmatrix}$ 故A属于 $\lambda=2n-1$ 的特征向量是 $(1,1,\cdots,1)^T$

例7 求 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量

解 $|\lambda E-A|=\lambda^3-13\lambda^2$

$\lambda_1=13,\lambda_2=\lambda_3=0$

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\ 1\ 3)$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\ 1\ 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=13\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

即 $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=13\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

（二）相似及相似对角化的判定

定义 设A，B是n阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则称A与B相似，记作A~B。

性质 若A~B,则

(1) $|A|=|B|$

(2) $r(A)=r(B)$

(3) $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,即A,B有相同的特征值.

(4) $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$

$$|B|=|P^{-1}AP|=|P^{-1}||A||P|=|A|$$

$$|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A|\cdot|P|=|\lambda E-A|$$

$$\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$$

$\sum a_{ii}$ ，A矩阵特征值的和

$\sum b_{ii}$ ，B矩阵特征值的和

例8．A~B(4阶),A的特征值是 $1,2,3,4$ $|B+E|=$

解：①A~B⇒B的特征值是 $1,2,3,4 \Rightarrow |B+E|=2,3,4,5$

②A~B⇒ $P^{-1}(A+E)P=P^{-1}AP+E=B+E$ 即A+E~B+E

$$\Rightarrow |B+E|=|A+E|=2,3,4,5$$

例9 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ，$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$

$|A|=|B|$, $r(A)=r(B)$, $|\lambda \mathrm{E}-A|=(\lambda-1)^2=|\lambda\mathrm{E}-B|$, $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$

$\forall P$ $P^{-1}AP=P^{-1}\mathrm{E}P=\mathrm{E}\neq B$

A,B 不相似

若 $A\sim\wedge$，即有$P^{-1}AP=\wedge$，于是 $AP=P\wedge$

$$A(r_1,r_2\cdots,r_n)=(r_1,r_2\cdots,r_n)\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$$

$$(Ar_1,Ar_2,\cdots,Ar_n)=(a_1r_1,a_2r_2,\cdots,a_nr_n)$$

$$Ar_i=a_ir_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因为 $P=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 可逆，故 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 线性无关，$Ar_i=a_ir_i$，$r_i\neq 0$。

故 r_i 是A属于 a_i 间特征向量。

$P^{-1}AP=\wedge$ ←A的特征值

↑

A的线性无关的特征向量

$A\sim\wedge\Leftrightarrow$A有n个线性无关的特征向量

若 $P^{-1}AP=B\neq\wedge$

↑

不是特征向量

定理 属于A的不同特征值的特征向量线性无关

定理（充分）若A有n个不同的特征值，则A可以相似对角化

定理 若 λ 是A的k重特征值，那么 λ 至多有k个线性无关的特征向量。

设A是5阶矩阵。

$\lambda_1=\lambda_2=3$　　　$\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=-1$

$(3E-A)x=0$　　　$(-E-A)x=0$　　　A不可能相似对角化

X_1　　　3重根至多3个，

$(-E-A)x=0$　　X_1,X_2

$(3E-A)x=0$　　至多2个

A不能相似对角化

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Uparrow$

A 有 n 个不同的特征值

A 是实对称矩阵

若 λ_i 是 n_i 重特征值，则 λ_i 必有 n_i 个线性无关的特征向量

$\Uparrow$ $(\lambda_i \mathrm{E} - A)x = 0$

$n - r(\lambda_i \mathrm{E} - A) = n_i$，即 $r(\lambda_i \mathrm{E} - A) = n - n_i$

（1） **是否实对称矩阵。是实对称矩阵，可以相似对角化**

（2） **不是实对称矩阵，求特征值。特征值无重根，可相似对角化；特征值有重根，算秩。**

例10．判断矩阵A能否相似对角化

（1） $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda = 1,3,0$

A可以相似对角化

（2） $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_2 = 3$

$$r(\mathrm{E} - A) = r\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

$$n - n_i = 3 - 2 = 1$$

$\therefore$ $r(\mathrm{E} - A) \neq n - n_i$

$\therefore$ **A不能对角化。**

（3） $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$ $|\lambda E-A|=\lambda^3-6\lambda^2$，$\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$

$r(0E-A)=r(A)=1$

$n-n_i=3-2=1$

故A可相似对角化。

（4） $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{bmatrix}$

$|\lambda E-A|=\lambda^3,\qquad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$r(0E-A)=1,\qquad n-n_i=3-3=0$

A不可以对角化

（5） A是2阶矩阵，$|A|<0$ 。

$|A|=\lambda_1\lambda_2<0$

$\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow A\sim\Lambda$

（三）如何求矩阵中的参数

当已知条件与特征值相关联时，以下三个方面去思考。

（1）特征值，特征向量定义

（2）相似的必要条件

（3）相似对角化的理论

例11．已知 $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ **，求x与y的值**

[分析]，由于A~B

必要条件 |A|=|B|， $r(A)=r(B)$

$$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|, \quad \sum a_{ii} = \sum b_{ii}$$

2+1+x=1+y+（-2）　　（1）

① $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} = -2x-8, |B| = -2y$

x+4=y （本题与（1）式相同，不适合）

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-x \end{vmatrix} = \lambda^3 - (3+x)\lambda^2 + (3x-6)\lambda + 2x + 8$$

$$|\lambda E - B| = (\lambda-1)(\lambda-y)(\lambda+2) = \lambda^3 + (1-y)\lambda^2 - (y+2)\lambda + 2y$$

不要算抽象的 $|\lambda E - A|$ **特征多项式，算一个具体的特征多项式。**

③ $|E - A| = 0, \quad |E - A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = -4x$

$$|-2E - A| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2-x \end{vmatrix} = 4x = 0$$

推荐 $\begin{cases} \sum a_{ii} = \sum b_{ii} \\ |\lambda_0 E - A| = 0 \end{cases}$

例12．设 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ c+1 & -3 & a-1 \\ b & 0 & -4 \end{bmatrix}$，$|A|=1$，又 $\alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A^{-1} 的特征向量，求a，b，c的值。

解：用特征值特征向量的定义建立方程组，求出参数。

不要去求 A^{-1}，利用 A 与 A^{-1} 的关系。

设 α 是 A^{-1} 的属于特征值 λ 的特征向量

即 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，于是 $\lambda A\alpha=\alpha$，即

$$\lambda\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ c+1 & -3 & a-1 \\ b & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由此可得

$$\begin{cases} \lambda(-a+1+c)=-1 & (1) \\ \lambda(-c-1+3+a-1)=-1 & (2) \\ \lambda(-b-4)=1 & (3) \end{cases}$$

（1）+（2）：$2\lambda=-2$ 有 $\lambda=-1$

把 $\lambda=-1$ 代入（3）有b=-3

把 $\lambda=-1$ 代入（1）有a=c

由 $|A|=1$，b=−3，a=c，有

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ a+1 & -3 & a-1 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ -2a+1 & 0 & -2a-1 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2a+1 & -2a-1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=2a-7=1$$

于是 $a=4,\quad c=4,\quad b=-3.$

建立方程组，利用特征值特征向量的定义。

例13 若 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值，求P使 $P^{-1}AP=\wedge$。

[解] 因为 $A\sim\wedge$，$\lambda=2$是二重特征值，故

$r(2E-A)=3-2=1$

由于 $2E-A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -2 & -y\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}$ $\quad \frac{1}{-x}=\frac{1}{-2}=\frac{-1}{-y}$ $\quad \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2-x & 0 & -y-2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

从秩为1,求出 x=2,y=-2

A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{把3列加到2列}]{\text{把3列加到1列}}\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 2\\ \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$$

所以A的特征值是2，2，6 $\Leftarrow 2+2+\lambda_3=1+4+5$

对 $\lambda=2$，由 $(2E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到特征向量 $X_1=(-1,1,0)^T$，$X_2=(1,0,1)^T$

对 $\lambda=6$，由 $(6E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\uparrow$

秩为2

得到特征向量 $X_3=(1,-2,3)^T$

令 $P=(X_1,X_2,X_3)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{bmatrix}$

（四）反求矩阵A

例14．已知$A\alpha_i=i\alpha_i$(i=1，2，3)，其中 $\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(2,-2,1)^T$，$\alpha_3=(-2,-1,2)^T$，求矩阵A。

[分析]由 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=3\alpha_3$ 知

A的特征值为1,2,3　$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为A的特征向量

[解一] 用矩阵方程

由$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=3\alpha_3$知

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是矩阵A的不同特征值的特征向量，它们线性无关.

故$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆

那么

$$A=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&2\end{bmatrix}$$

[解二] 相似对角化

因为A有3个不同的特征值。于是A可相似对角化

$$P^{-1}AP=\wedge=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\qquad 其中\ P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$$

故

$$A=P\wedge P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

若 $\beta=(1,-1,5)^T$，求$A^n\beta$

[解一] 由$A=P\wedge P^{-1}$。有

$$A^2=(P\wedge P^{-1})(P\wedge P^{-1})=P\wedge(P^{-1}P)\wedge P^{-1}=P\wedge^2P^{-1}$$

归纳地

$$A^n=P\wedge^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1+2^{n+2}+4\cdot3^n&2-2^{n+2}+2\cdot3^n&2+2^{n+1}-4\cdot3^n\\2-2^{n+2}+2\cdot3^n&4+2^{n+2}+3^n&4-2^{n+1}-2\cdot3^n\\2+2^{n+1}-4\cdot3^n&4-2^{n+1}-2\cdot3^n&4+2^n+4\cdot3^n\end{bmatrix}$$

那么$A^n\beta=\begin{bmatrix}1+2^{n+1}-2\cdot3^n\\2-2^{n+1}-3^n\\2+2^n+2\cdot3^n\end{bmatrix}$

[解二] 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ （$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$线性相关）

$$\begin{bmatrix}1&2&-2&\vdots&1\\2&-2&-1&\vdots&-1\\2&1&2&\vdots&5\end{bmatrix}\xrightarrow{1行\times(-2)加到2,3行}\begin{bmatrix}1&2&-2&\vdots&1\\0&-6&3&\vdots&-3\\0&3&3&\vdots&6\end{bmatrix}\xrightarrow{3行\div3}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-2&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&2\\0&0&1&\vdots&1\end{bmatrix}$$ 解出 $x_1=1,x_2=1,x_3=1$。即 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

那么 $A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2+A\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

$A^2\beta=A(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=\alpha_1+2^2\alpha_2+3^2\alpha_3$

$A^2\beta=A(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)=\alpha_1+2^2\alpha_2+3^2\alpha_3$

归纳地

$$A^n\beta=\alpha_1+2^n\alpha_2+3^n\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1+2^{n+1}-2\cdot3^n\\2-2^{n+1}-3^n\\2+2^n+2\cdot3^n\end{bmatrix}$$

若 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $A^n\alpha=\lambda^n\alpha$

对 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$

$$\begin{aligned}A^n\beta&=A^n(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3)\\&=x_1A^n\alpha_1+x_2A^n\alpha_2+x_3A^n\alpha_3\\&=x_1\lambda_1{}^n\alpha_1+x_2\lambda_2{}^n\alpha_2+x_3\lambda_3{}^n\alpha_3\end{aligned}$$

A^n 如A~∧

先求A特征值，特征向量

构造 $P=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

$P^{-1}AP=\wedge\Rightarrow A=P\wedge P^{-1}$

$A^n=P\wedge^n P^{-1}$

例15 已知方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3\\2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6\\-x_1-2x_2+ax_3=-3\end{cases}$ 有无穷多解，若矩阵A的特征值理1，-1，0，对应的特征向量依次是 $(1,2a,-1)^T,(a-2,-1,a+1)^T,(a,a+3,a+2)^T$，求$A$ 及A^{100}。

[解] 因为方程组有无穷多解，对增广矩阵作初其行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&3\\2&a+4&-5&\vdots&6\\-1&-2&a&\vdots&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&3\\0&a&-7&\vdots&0\\0&0&a+1&\vdots&0\end{bmatrix}$$

若 $a=0$ $\rightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})<3$ $\begin{bmatrix}1&2&1&3\\0&0&-7&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ 5

可见 $a=-1,a=0$时，方程组有无穷多解。

若 $a=-1$ 有

$\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ 线性相关。

与不同特征值的特征向量线性无关相矛盾。舍去。

若 $a=0$, 有

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$

由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,-\alpha_2,0)$

$A=(\alpha_1,-\alpha_2,0)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$

因为A有3个不同的特征值。故 $A\sim\wedge=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$

由 $P^{-1}AP=\wedge=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$ 其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

于是 $A=P\wedge P^{-1}$ 那么 $A^2=(P\wedge P^{-1})(P\wedge P^{-1})=P\wedge^2 P^{-1}$

从而 $A^n=P\wedge^n P^{-1}$

$$所以A^{100}=P\wedge^{100}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-1&3\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-1&3\\-1&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&-2&3\\2&-2&3\end{bmatrix}$$

定理 实对称矩阵必可相似对角化。

定理 若A是n阶实对称矩阵，则存在正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ=\wedge$

定理 若A是n阶实对称矩阵，λ_1,λ_2是A的不同的特征值，X_1,X_2分别是属于λ_1和λ_2的特征向量，则X_1和X_2必正交。

$AX_1=\lambda_1X_1$，$AX_2=\lambda_2X_2$，$\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow X_1,X_2$正交

$\lambda_2X_1^TX_2=X_1^TAX_2=X_1^TA^TX_2=(AX_1)^TX_2=(\lambda_1X_1)^TX_2=\lambda_1X_1^TX_2$

$(\lambda_2-\lambda_1)X_1^TX_2=0\quad\therefore X_1^TX_2=0$

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\qquad|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

定理 若λ_0是实对称矩阵A的k重特征值，则λ_0必有k个线性无关的特征向量

用正交矩阵化A为对角形计算步骤

（1）求A的特征值与特征向量。

（2）单位化 （Schmidt 正交化）

（3）构造正交矩阵 P,Q,T

（4）$P^{-1}AP=\wedge$

例16 设 $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{bmatrix}$，求正交矩阵P，使$P^{-1}AP=\wedge$

[解] 由A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-6 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}\overset{-1倍}{=}\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & 7-\lambda\\ 2 & \lambda-6 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & 0\\ 2 & \lambda-6 & 4\\ 4 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-7)^2(\lambda+2)$

A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=7,\ \lambda_3=-2$

对 $\lambda=7$，有$(7E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ 得到 $X_1=(-1,2,0)^T$，$X_2=(-1,0,1)^T$

对 $\lambda=-2$，有$(-2E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 1\\ 0 & 18 & -9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 18 & -9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到$X_3=(2,1,2)^T$

由于X_1,X_2是同一个特征值的特征向量，现在不正交，故应 Schmidt 正交化，有

$$\beta_1=X_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$$

单位化，有 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$

再把$X_3=(2,1,2)^T$单位化，有 $\gamma_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

那么令 $P=(\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$

则有$P^{-1}AP=\wedge=\begin{bmatrix}7 & & \\ & 7 & \\ & & -2\end{bmatrix}$

例17 设A是3阶实对称矩阵，特征值是1，-2，0，属于$\lambda=1$的特征向量$\alpha_1=(1,a,1)^T$，属于$\lambda=2$的特征向量$\alpha_2=(a,a+1,1)^T$，求矩阵A

[解] 因为实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交，故

$\alpha_1^T\alpha_2=a+a(a+1)+1=0$

得到$a=-1$. 于是$\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$

设 属于$\lambda=0$的特征向量为$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$

$\alpha_1^T\alpha_3=x_1-x_2+x_3=0$

$\alpha_2^T\alpha_3=-x_1+x_3=0$

解出$\alpha_3=(1,2,1)^T$

于是$A(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\alpha_1,-2\alpha_2,0)$

$$A=(\alpha_1,-2\alpha_2,0)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{bmatrix}$$

例18 设A是3阶实对称矩阵，秩$r(A)=2$, $A^2=A$,求A的3个特征值。

[解] 设λ是A的任一特征值，X是属于λ的特征向量，即$AX=\lambda X$, $X\neq0$

那么$A^2X=A(\lambda X)=\lambda^2X$

由$A^2=A$,有$\lambda^2X=\lambda X$ 得$(\lambda^2-\lambda)X=0$

故$\lambda=1$或0。

因为A是实对称矩阵，故$A\sim\wedge$, $\wedge\begin{bmatrix}*&&\\&*&\\&&*\end{bmatrix}$由A的特征值所构成，

根据$r(A)=r(\wedge)=2$. 知

$$\wedge=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$$

所以 A的3个特征值是1，1，0。

例19 已知$A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$,若方程组$Ax=\beta$有解，但解不唯一，求正交矩阵Q，使$Q^TAQ$为对角形。

分析： 若$QQ^T=Q^TQ=E$,称Q为正交矩阵

Q是正交矩阵$\Leftrightarrow Q^T=Q^{-1}$

$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\wedge$

[解] $\because Ax=\beta$有无穷多解，故$r(A)=r(\overline{A})<3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-2-a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&\underset{-(a+2)(a-1)}{\underbrace{2-a-a^2}}&-2-a\end{array}\right]$$

若$a=-2$ $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$ 有无穷多解

若$a=1$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$ 无解

下略,请同学完成，参考答案

故$a=-2$ $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$， $Q^TAQ=\begin{bmatrix}3&&\\&-3&\\&&0\end{bmatrix}$

例20 设A是实对称矩阵,$A^3+2A^2=3E$,求$|A+5E|$的值。

分析： A为抽象的矩阵。

行列式=特征值的乘积

A的特征值 $\Rightarrow$ $A+5E$ 的特征值$\Rightarrow |A+5E|$ 的值

[解] 设λ 是A的任一特征值,X是属于 λ 的特征向量,即$AX=\lambda X, X\neq 0$.

由此知 $A^2X=\lambda^2X$, $A^3X=\lambda^3X$,

$(A^3+2A^2)X=3X$

于是: $(\lambda^3+2\lambda^2-3)X=0$

因为$X\neq 0$，故$\lambda^3+2\lambda^2-3=0$

$$\lambda^3-1+2\lambda^2-2=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1+2\lambda+2)$$
$$=(\lambda-1)(\underset{\uparrow\text{复根}}{\lambda^2+3\lambda+3})=0$$

而实对称矩阵特征值必是实数

故A的特征值$\lambda\equiv 1$

所以$A+5E$的特征值全是6，从而 $|A+5E|=6^n$ 。

（六）综合题选讲

例21．已知$A=E+\alpha\beta^T$，其中$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，若 $\alpha^T\beta=2$ 。证明A可逆，并求A^{-1}。

分析： 要证A可逆最基本的方法就是证明A的行列式不为0

[证] 设 $B=\alpha\beta^T$

$$B=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}$$

由于$r(B)=1$，有

若$r(A)=1$ $|\lambda E-A|=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2$

$\downarrow$

$$|\lambda E-B|=\lambda^3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\lambda^2=\lambda^3-2\lambda^2$$

B的特征值是2，0，0。从而A的特征值是3，1，1。因此A可逆。

分析：通常的方法是：定义、伴随矩阵、初等行变换。

解 因为$B^2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}}_{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}=2B$

那么 由 $B=A-E$，有

$(A-E)^2=2(A-E)$

即 $A^2-4A=-3E$

$$A\cdot\frac{4E-A}{3}=E$$

$$A = E + B$$
$$\Downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{4E - A}{3} = \frac{3E - B}{3} = E - \frac{1}{3}B$$
$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{3}a_1b_1 & -\frac{1}{3}a_1b_2 & -\frac{1}{3}a_1b_3 \\ -\frac{1}{3}a_2b_1 & 1-\frac{1}{3}a_2b_2 & -\frac{1}{3}a_2b_3 \\ -\frac{1}{3}a_3b_1 & -\frac{1}{3}a_3b_2 & 1-\frac{1}{3}a_3b_3 \end{bmatrix}$$

例22. 设A是n阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是n维列向量，已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，证明 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件 $\lambda=0$ 是A的特征值。

[证] 必要性

若$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$线性相关，则存在不全为0的$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_nA\alpha_n=0$$

即 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=0$

记 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，$k_1,k_2,\cdots,k_n$不全为0，知必有 $\alpha\neq0$ 。那么

$A\alpha=0=0\alpha\ (\alpha\neq0)$

按定义，$\lambda=0$ 是A的特征值。

[证] 充分性

分析： 要判断n个n维向量线性相关，应该证明这个n阶行列式为0。

$$|A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n| = |A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)|$$
$$= |A|\cdot|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n| = 0$$
$$\uparrow$$

因为 $\lambda=0$ 是A的特征值 $\Rightarrow$ $|A|=0$

所以向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$线性相关

分析：若可以证明向量秩小于n，那么这个向量组就线性相关。

$$r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=r\big(A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\big)=r(A)<n$$

可逆矩阵

因为$\lambda=0$是A的特征值，则 $|A|=0$。那么$r(A)<n$。

所以向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$线性相关

例23．已知 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$ 求秩 $r(A)$

[解] 由于

$$A=\begin{bmatrix} a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=(a-1)E+B$$

又 $r(B)=1$，知 $|\lambda E-B|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}$。B的特征值为 $n,0,\cdots,0$。于是A的特征值是 $n+a-1,a-1,\cdots,a-1$

∵A是实对称矩阵，必可相似对角化

$$A\sim\begin{bmatrix} n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix}$$

当 $a\neq 1-n$ 且 $a\neq 1, r(A)=n$

当 $a=1$ ，$r(A)=1$

当 $a=1-n$, $r(A)=n-1$

第五讲 练习题

练习:

1.已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，则 $a=$______。

[分析]

因为矩阵A只有一个线性无关的特征向量，故A的特征值必是二重根。

由A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -a \\ -1 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+15-a=(\lambda-4)^2$$

$\therefore\quad a=-1$

$A=\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 2 & * \\ * & * & 3 \end{bmatrix}$ 只有一个线性无关特征向量

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2 \quad r(2E-A)=2$

练习:

2.已知A是3阶实对称矩阵，特征值是1，1，-2。其中属于 $\lambda=-2$ 的特征向量是 $\alpha=(1,\ 0,\ 1)^T$，求 A^3

[解] 设矩阵A属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是 $X=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$。则X与 α 相互正交，有

$$X^T\alpha=x_1+x_3=0$$

所以属于 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量是

$X_1=(0,\ 1,\ 0)^T$，$X_2=(-1,\ 0,\ 1)^T$

因为A是实对称矩阵，必可相似对角化，有

$$P^{-1}AP=\wedge=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$，其中 $P=(X_1,\ X_2,\ \alpha)$

那么 $A=P\wedge P^{-1}$ 于是

那么$A=P\wedge P^{-1}$于是

$$A^3=(P\wedge P^{-1})(P\wedge P^{-1})(P\wedge P^{-1})=P\wedge^3 P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{2}&0&-\frac{9}{2}\\0&1&0\\-\frac{7}{2}&0&-\frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

练习：

3.已知$\lambda=2$是矩阵$A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&a\\2&a&a+2\end{bmatrix}$的二重特征值。求正交矩阵$Q$，使$Q^{-1}AQ=\wedge$

［解］　因为A是实对称矩阵，$\lambda=2$ 必有2个线性无关的特征向量，故$r(2E-A)=1$

$$2E-A=\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-a\\-2&-a&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&2-a\\0&2-a&2-a\end{bmatrix}$$

从而 $a=2$ 。那么

$$A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$

由$\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$知$2+2+\lambda_3=4+4+4$得$\lambda_3=8$

由$(2E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 得$X_1=(-1,\ 1,\ 0)^T$，$X_2=(-1,\ 0,\ 1)^T$

由$(8E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$ 得$X_3=(1,\ 1,\ 1)^T$

对X_1，X_2Schmidt正交化，有

$$\beta_1=X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_2=X_2-\frac{(X_2\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

把 β_1　β_2　X_3 单位化

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

令

$$Q=(\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

则 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{bmatrix}$

练习：

4.A，B均为n阶矩阵，且A可逆，证明AB与BA有相同的特征值。

[证]（用AB与BA有相同的特征多项式）

$$|\lambda E-AB|=|\lambda AA^{-1}-AB|=|A(\lambda A^{-1}-B)|=|A|\cdot|\lambda A^{-1}-B|$$

$$=|\lambda A^{-1}-B|\cdot|A|=|\lambda E-BA|$$

[证]（用相似矩阵有相同的特征值）

$\because$ A可逆，$\therefore A^{-1}(AB)A=BA$。即 $AB\sim BA$.因而AB与BA有相同的特征值。

[证]（从定义的角度出发）

设 $ABX=\lambda X$，$X\neq 0$ 。

$BABX=\lambda BX$，$BA\alpha=\lambda\alpha$，其中 $\alpha=BX$，

若$\lambda\neq 0$，必有 $\alpha=BX\neq 0$

（若$\alpha=BX=0$，则$\lambda X=ABX=A0=0$，又 $X\neq 0$，故$\lambda=0$，与 $\lambda\neq 0$ 矛盾。）

所以，$\lambda\neq 0$ 时，若X是AB属于λ 的特征向量，那么BX是BA属于λ 的特征向量。

若AB有特征值 $\lambda=0$，因为

$$|BA|=|AB|=0$$

故$\lambda=0$是BA特征值

故AB和BA有相同的特征值

小结：

理解特征值、特征向量的概念，掌握性质、掌握计算方法。

理解相似的概念，掌握相似的性质，掌握相似对角化的方法。

掌握实对称矩阵特征值特征的向量的性质。