第四讲 线性方程组

要点： $Ax=0$ **有非0解的判定及求解**

$Ax=b$ **有解判定与解的结构**

方程组有没有解？有几个解？怎样求出所有的解？

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad Ax=b \qquad A-m\times n$$

$$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta \qquad x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (4.1)$$

线性方程组（4.1）的导出组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (4.2) \qquad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \vdots \\ x_n=0 \end{cases}$$ **必有零解**

是否有非零解？

定理 $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ x_i 不全为0 $r(A)\le \min(m,n)=m$

推论1 当 $m<n$ 时(4.2) 有非0解

当一个齐次方程组，方程的个数少，未知数的个数多，该方程组一定有非0解。

推论2 当 $m=n$ 时，(4.2)有非0解 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$

定理 若是 η_1,η_2 是 $Ax=0$ 的解，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$ 仍是 $Ax=0$ 的 解.

$A(k_1\eta_1+k_2\eta_2)=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2=0$

定义 向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系,如果

(1) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解

(2) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关

(3) $Ax=0$ 的任一个解都可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出。

定理 齐次方程组（4.2）系数矩阵的秩 $r(A)=r<n$，

则 $Ax=0$ 的基础解系有 $n-r$ 个向量.

定理 齐次方程组（4.2）系数矩阵的秩 $r(A)=r<n$，

则 $Ax=0$ 方程组的通解为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$

其中 是（4.2）的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$

非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1+2x_2=5\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2=3\\2x_1+2x_2=5\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2=3\\2x_1+2x_2=6\end{cases}$$

唯一解 无解 无穷解

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&\cdots&c_{1n}&\vdots&d_1\\&c_{22}&c_{23}&\cdots&c_{2n}&\vdots&d_2\\&&\ddots&c_{rr}&c_{rn}&\vdots&d_r\\&&&&0&\vdots&d_{r+1}\\&&&&&&\end{bmatrix}$$

如 $d_{r+1}\ne 0$，方程组无解

如 $d_{r+1}=0$，方程组有解，当 $r=n$ 时 惟一解
$r<n$ 时 ∞ 解

定理 非齐次线性方程组（4.1）有解

$\Leftrightarrow \beta$ 可由 A 的列向量线性表出

$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 是等价向量组

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$

$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$

定理 如果 α_1,α_2 是线性方程组（4.1）的解，

那么 $\alpha_1-\alpha_2$ 是其导出组（4.2）的解.

定理 如果 α 方程组（4.1）的解，η 是导出组（4.2）的解，

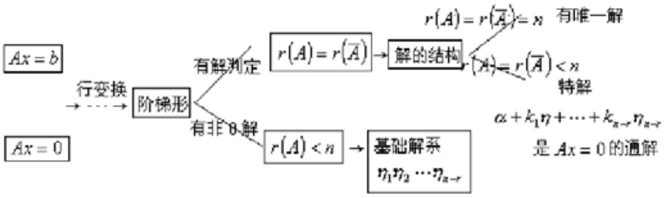
则 $\alpha+\eta$ 是（4.1）的解.

定理 对于线性方程组（4.1），若 $r(A)=r(\overline{A})=r<n$，则方程组的通解是

$$\alpha+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 α 是（4.1）的解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是（4.2）的基础解系，

$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数



例 1．求齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_4-x_5=0 \\ 2x_2+x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_4+3x_5=0 \end{cases}$$ 的基础解系.

解 系数矩阵已是阶梯形，由 $r(A)=3,$ 知 $n-r(A)=2$

（基础解系中有 2 个解向量；每个解中有 2 个自由变量）

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & 3 & -1 \\ & \underline{2} & 1 & 2 & 1 \\ & & & \underline{1} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\eta_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0,0\right)^T \qquad \eta_2=\left(\frac{15}{2},\frac{5}{2},0,-3,1\right)^T$$

基础解系：η_1，η_2，通解 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$。

例2 四元方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$ 的基础解系

解 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad n - r(A) = 4 - 2 = 2$

求解基础解系要特别重视

$\eta_1 = (0,0,1,0)^T$

$\eta_2 = (-1,1,0,1)^T$

齐次方程组如何确定自由变量?

(1) 对系数矩阵作初等行变换化为阶梯形

(2) 由秩 $r(A)$ 确定自由变量的个数 $n-r(A)$

(3) 确定一个秩为 $r(A)$ 的矩阵，则其余的 $n-r(A)$ 列对应的就是自由变量

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ & 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ & 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\eta_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)^T$

$\eta_2 = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 0, -3, 1\right)^T$

$\eta_1 = (-1,1,-2,0,0)^T$

$\eta_2 = (10,0,5,-3,1)^T$

例3. 齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 系数矩阵为A，若有三阶非0矩阵B,使AB=0，则

(A) $\lambda = -2, |B| = 0$ (B) $\lambda = -2, |B| \neq 0$

(C) $\lambda = 1, |B| = 0$ (D) $\lambda = 1, |B| \neq 0$

分析 由AB=0，知 $r(A) + r(B) \leq 3$ ，因为 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \neq 0$ $r(A) \geq 1$

故 $r(B) \leq 2$ 即 $|B| = 0$

或，若 $|B| \neq 0$ ，则B可逆，于是

$$A = AB \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} = 0$$

与已知矛盾。

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$ 易见 $\lambda=1$ 时 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$

所以选（C）

由AB=0， $B\neq 0$ 知 $Ax=0$有非0解，那么 $|A|=0$

例4．判断下列命题是否正确

(1) n 元方程组 $Ax=b$ 有惟一解 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$

(2) 若 $Ax=0$ 只有零解，那么 $Ax=b$ 有惟一解

(2) 若 $Ax=0$ 只有零解，那么 $Ax=b$ 有惟一解

$Ax=0$ 只有 0 解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$

$Ax=b$ 有惟一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})=n$

由 $r(A)=n \Rightarrow r(\overline{A})=n$ ？

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1-x_2=0\\ 2x_1+2x_2=0\end{cases} \quad A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\2&2\end{pmatrix} \quad r(A)=2=n \quad Ax=0 \text{ 只有 解}$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1-x_2=2\\ 2x_1+2x_2=3\end{cases} \quad \overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\0&0&1\end{bmatrix} \quad r(\overline{A})=3$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\ x_1-x_2=3\\ 2x_1+2x_2=2\end{cases} \quad \overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\2&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&0&0\end{bmatrix} \quad r(\overline{A})=r(A)=n$$

若 $Ax=b$ 有惟一解，那么 $Ax=0$ 只有零解

若 $Ax=0$ 只有0解，那么 $Ax=b$ 没有无穷多解。

(3) 若 $Ax=0$ 有 ∞ 解，那么 $Ax=b$ 有 ∞ 解。

此命题是错误的

$Ax=0$ 有 ∞ 解　　$r(A)<n$

$Ax=b$ 有 ∞ 解要求 $r(A)=r(\overline{A})<n$

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad r(A)=1$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=3 \end{cases} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad r(\overline{A})=2$$

无　解

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{cases} \qquad r(\overline{A})=r(A)=1<2$$

当齐次方程组有无穷解时，线性方程组可能无解，也可能有无穷多解

当齐次方程组有无穷解时，线性方程组无唯一解

(4) 若 $Ax=b$ 有两个不同的解，那么导出组 $Ax=0$ 有 ∞ 解

此命题正确

$$\begin{aligned} A\alpha_1&=b \\ \underline{A\alpha_2}&\underline{=b} \end{aligned} \qquad A(\alpha_1-\alpha_2)=0 \qquad \alpha_1-\alpha_2 \text{ 是 } Ax=0 \text{ 的解}$$

齐次方程组有非0解就等于有无穷多解

例5．设A 是 4×5 的矩阵， $r(A)=4$，判断下列命题

(1)　$A^Tx=0$ 只有零解

按照秩的性质 $r(A^T)=r(A)$

$r(A^T)=r(A)=4$，

A^T 是 5×4 的矩阵

方程的个数　　未知数的个数

$r(A^T)$ 等于未知数个数，所以 $A^Tx=0$ 只有0解

(2) $A^TAx=0$ 有非零解?

$r(A^TA)\le r(A)=4$

乘积矩阵的秩小于等于每个矩阵的秩

A^TA 是5阶矩阵

所以 $A^TAx=0$一定有非0解

(3) $\forall b$,　$Ax=b$ 无穷多解

线性方程组无穷多解判断的方法：
系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩小于未知数个数

r(A)=4, A-4× 5　$\Rightarrow$ A的行向量组线性无关

一个向量组线性无关，那么其延伸组必线性无关

$r(A)=r(\overline{A})=4<5$

所以该命题正确。

（4） $\forall b, A^T x = b$ 有惟一解

注意和上题b的含义不同

A^T是 5×4 矩阵

A^T 的列向量线性无关

A^T 的列向量与 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 不等价 $r(A^T)=4$

可以找到这样的b使方程组 $A^T x = b$ 无解。

例6．设A是n阶矩阵，α 是n维列向量，若秩 $r\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{bmatrix}=r(A)$，则线性方程组

（A） Ax= α 必有无穷多解 （B） Ax= α 必有惟一解

(C) $\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解 (D) $\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 必有非0解

分析 对于齐次方程组Ax=0

(1)只有零解 （2） 必有非零解 两者必居其一且仅居其一

$\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{bmatrix} \to n+1$ 阶 $r\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{bmatrix}=r(A)\le \underbrace{n}_{\text{小于等于n}} < n+1$

故应选（D）

（A） $r(A)=r(A,\alpha)<n$

（B） $r(A)=r(A,\alpha)=n$

(B) $r(A)=r(A,\alpha)=n$

矩阵的秩就是列向量组的秩

$r(A)\le r(A,\alpha)\le r\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & 0\end{bmatrix}=r(A)$

矩阵的秩就是行向量组的秩

所以$r(A)=r(A,\alpha)$,但与n的关系不能确定，故（A），（B）均不正确。

例7．A是n阶矩阵，各行元素的和均为0，秩 $r(A)=n-1$，则齐次方程组Ax=0的通解是 ________。

[分析] 由于 $n-r(A)=n-(n-1)=1$ 故通解形式为 $k\eta$ 。

$$Ax=0\text{即}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

各行元素的和均为0，即
$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{1n}=0\\ a_{21}+a_{22}+\ldots+a_{2n}=0\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}+a_{n2}+\ldots+a_{nn}=0\end{cases}$$

所以 $x_1=1,x_2=1,\cdots,x_n=1$ 是Ax=0的一个解，因此Ax=0的通解为 $k(1,1,\cdots,1)^T$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

例8．设A是n阶矩阵，秩 $r(A)=n-1$ ，代数余子式 $A_{11}^*\neq 0$

(1) Ax=0的通解 $\underline{k(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T}$

[分析] 因为r(A)=n-1,n-r(A)=1,故Ax=0的通解有形式 $k\eta$ 。

$$AA^*=|A|E\xlongequal{r(A)=n-1,|A|=0}0$$

AB=0,则B的每一列都是 $Ax=0$ 的解

故 A^* 的每一列都是 $Ax=0$ 的解。

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\ A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

已知 $A_{11}\neq 0$ ，故 $(A_{11},A_{12},\cdots A_{1n})^T$ 是 $Ax=0$ 的非0解。

(2) $A^*x=0$ 的通解

[分析] 因为 $r(A)=n-1,\text{故}r(A^*)=1$ 。

$$r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$$

因为 $r(A)=n-1,\text{故}r(A^*)=1$ 。于是 $n-r(A^*)=n-1$

所以 $A^*x=0$ 的通解形式 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$

$$A^*A=|A|E\xlongequal[|A|=0]{r(A)=n-1}0$$

于是A的每一列都是 $A^*x=0$ 的解。

由于 $r(A)=n-1$，A中必有n-1列线性无关，它们就是 $A^*x=0$ 的基础解系

$$A^*A=A^*\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \end{bmatrix}=0$$

n个n维向量线性无关，充要条件n阶行列式不为0

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

n个n维向量线性无关，充要条件n阶行列式不为0

$$A^*A=A^*\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=0$$

向量组线性无关，其延伸组也线性无关

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{线性无关}} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{线性无关}}$$

例9．4元方程组 $Ax=b$ 中，$r(A)=3$，三个解为 X_1,X_2,X_3，若 $X_1=(1,1,1,1)^T$

$X_2+X_3=(2,3,4,5)^T$ ，则方程组通解为______

分析 由于$n-r(A)=1$，故通解形式为 $\alpha+k\eta$ 。因为 X_1 是$Ax=b$的解，

故 α 可取为 X_1 。

若 $\alpha_1\alpha_2$ 是$Ax=b$的解，则由$A\alpha_1=b$ ，$A\alpha_2=b$ 知 $A(\alpha_1-\alpha_2)=0$

知 $\alpha-\alpha_2$是$Ax=0$ 的解.

$A(X_2+X_3)=2b$ $A(2X_1)=2b$

故$A(X_2+X_3-2X_1)=0$ 即 $(0,1,2,3)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系

例9*．4元方程组$Ax=b$ 中，$r(A)=3$，若$X_1+X_3=(1,1,1,1)^T$ ，

$X_2+X_3=(2,3,4,5)^T$ ，则方程组通解为______

分析 $(X_2+X_3)-(X_1+X_3)=X_2-X_1=(1,2,3,4)^T$ 是 $Ax=0$ 的解

又 $A(X_2+X_3)=2b$ ，故 $A\dfrac{X_2+X_3}{2}=b$ ，

所以 $\dfrac{X_2+X_3}{2}$ 是 $Ax=b$ 的解，

因此通解为 $(1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})^T+k(1,2,3,4)^T$

当然，$\frac{1}{2}(X_1+X_3)$ 也是 $Ax=b$ 的解。

故 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T+k(1,2,3,4)^T$ 亦是通解

例9**．4元方程组 $Ax=b$ 中，$r(A)=3$，若 $2X_1+X_3=(1,1,1,1)^T$ ，

$X_2+X_3=(2,3,4,5)^T$ ，则方程组通解为______

分析 特解可以是 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$ ，也可是 $(1,\frac{3}{2},2\frac{5}{2})^T$

由于

$2(2X_1+X_3)-3(X_2+X_3)=4X_1-3X_2-X_3=3(X_1-X_2)+(X_1-X_3)$

是 $Ax=0$ 的解。

故通解为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T+k(4,7,10,13)^T$

例10．已知 $\zeta_1=(-9,1,2,11)^T$，$\zeta_2=(1,-5,13,0)^T,\zeta_3=(-7,-9,24,11)^T$ 是方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+7_2x_2+a_3x_3+x_4=d_1\\3x_1+b_2x_2+2x_3+2x_4=d_2\\9x_1+4x_2+x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$$

的解，则方程组的通解是______.

[分析] 只有知道r(A)，算出 $n-r(A)$ 才知解的结构。

$A=\begin{bmatrix}a_1&7&a_3&1\\3&b_2&2&2\\9&4&1&c_4\end{bmatrix}$ 中有2阶子式 $\begin{vmatrix}3&2\\9&1\end{vmatrix}\neq0$ 故 $r(A)\geq2$

由于 $\zeta_1-\zeta_2=(-10,6,-11,11)^T$ $\zeta_1-\zeta_3=(-2,10,-22,0)^T$

是 $Ax=0$ 的线性无关的解

由于 $\zeta_1-\zeta_2=(-10,6,-11,11)^T$ ，$\zeta_1-\zeta_3=(-2,10,-22,0)^T$

是 $Ax=0$ 的线性无关的解。故 $n-r(A)\geq2$ ， 即 $r(A)\leq2$ 。

从而 $r(A)=2.$ 所以通解形式为 $\alpha+k_1\eta_1+k_2\eta_2.$

$$\begin{pmatrix}-9\\1\\2\\11\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-10\\6\\-11\\11\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-5\\11\\0\end{pmatrix}$$

体会如何确定A的秩

例11．已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $A=\alpha\beta^T,B=\beta^T\alpha$

矩阵运算是基本功

求解方程 $2B^2A^2X=A^4X+B^4X+\gamma$

解

$$A=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},\qquad B=(1\ \frac{1}{2}\ 0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1\ \frac{1}{2}\ 0)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(1\ \frac{1}{2}\ 0)=2A \qquad A^4=8A$$

代入原方程，有 $8(A-2E)x=\gamma$

代入得 $A=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\ \end{pmatrix}$

$\because \begin{vmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\end{vmatrix}=0$ **方程组无解**

行列式为0，方程组可能无解，可能无穷解

数一题：$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则α= ______

解 $\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $n-r(A)=1$

通解为 $\alpha+k\eta$

特解 $\alpha=(\frac{1}{2},1,0)^T$ **基础解系** $\eta=(1,2,1)^T$

例12. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是4阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为4维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

[解] $\because \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$ 故 $r(A)=3$

因此 $Ax=0$ 的基础解系只包含一个向量。

$Ax=0$即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$ $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$

$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$ $\therefore Ax=0$ 的基础解系是 $(1,-2,1,0)^T$

$Ax=\beta$ $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$(1,1,1,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的解，

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\beta$$

故 $Ax=\beta$ 的通解 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

例13．已知 A，B均是 $m\times n$ 矩阵，若 $Ax=0$ 的解全是 $Bx=0$ 的解，证明B的行向量可由A的行向量线性表出。

[证] 由已知得到齐次方程组

$\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}$ 与Ax=0 同解，那么其基础解系相同，即 $n-r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n-r(A)$

即 $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)$ 假设为r

特别地，若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则A与B的行向量组等价,即 $r(A)=r(B)$

若 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是A的行向量组的极大线性无关组，那么 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots\alpha_{ir}$ 也是 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 中的行向量组的极大线性无关组，所以B的行向量可以由 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 线性表出，因此B的行向量可以由A的行向量线性表出。

例14．设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$，其中A，B均为 $m\times n$ 矩阵，现有4个命题

①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则秩 $r(A)\ge r(B)$

②若秩 $r(A)\ge r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解

③若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则秩 $r(A)=r(B)$

④若秩 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

以上命题中正确的是

(A) ①② (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④

④若秩 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

[分析] 该命题错误

若 $r(A)=r(B)\nRightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

$$\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3=0\\ \quad x_2-2x_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1-3x_2+5x_3=0\\ \quad x_2+3x_3=0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-3&5\\0&1&3\end{pmatrix}$$

由④不正确可排除（C）、（D），（A）、（B）中必有一个正确，故知①正确，那么②与③那一个正确？由①正确 $\Rightarrow$ ③正确。

如何证①正确？

$$\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}\text{与 } Ax=0 \text{ 同解} \Rightarrow n-r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n-r(A)$$

行秩

$\Downarrow$

$$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\ge r(B)$$

例15．若A，B均是n阶矩阵，且 $r(A)+r(B)<n$，证明 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有非0公共解。

证 构造齐次线性方程组

$$\begin{cases}Ax=0\\Bx=0\end{cases}\qquad \text{需证}\quad r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$$

设 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$ 是A的行向量组的极大线性无关组，$\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{it}$ 是B的行向量组的极大线性无关组。那么 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 的行向量必可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{i1},\cdots,\beta_{it}$ 线性表出，

从而

$$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\le r(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{i1},\cdots,\beta_{it})\le r+t=r(A)+r(B)<n$$

例16．已知方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\quad(1)\quad\text{与}\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0\\\cdots\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0\\b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1\end{cases}\quad(2)$$

证明方程组（1）有解的充分必要条件是方程组（2）无解

[证]（1）的系数矩阵与增广矩阵分别是

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\cdots\cdots&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\qquad \overline{A}_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\&\cdots\cdots&&&\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

（1）有解 $\Leftrightarrow r(A_1)=r(\overline{A}_1)$

$$A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix},\quad \overline{A}_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{pmatrix}$$

（2）无解 $\Leftrightarrow r(A_2)\neq r(\overline{A}_2)$

$\Rightarrow$若$r(A_1)=r(\overline{A}_1)$往证$r(A_2)\neq r(\overline{A}_2)$

由于 $A_2=\overline{A}_1^T$,故

$$r(A_2)\overset{\Downarrow}{=}r(\overline{A}_1^T)\underset{\uparrow\ r(A)=r(A^T)}{=}r(\overline{A}_1)\overset{\text{已知}\ \downarrow}{=}r(A_1)$$

行秩

$\downarrow$

$$r(\overline{A}_2)=r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}+1$$

必是极大无关组成员

列秩

$\downarrow$

$$=r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+1=r(A_1^T)+1=r(A_1)+1$$

于是 $r(A_2)\neq r(\overline{A}_2)$。

故（2）无解

第四讲 练习题

练习

1．设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-a \\ 3-2a & 2-a & 1 \\ 2-a & 2-a & 1 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$，已知方程组 $Ax=b$ 有解，且不惟一，

则a=___

[分析] $r(A)=r(\overline{A})<3$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-a & \vdots & 1 \\ 3-2a & 2-a & 1 & \vdots & a \\ 2-a & 2-a & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-a & \vdots & 1 \\ & a-1 & -2a^2+7a-5 & \vdots & 3a-3 \\ & & \dfrac{-a^2+4a-3}{-(a-3)(a-1)} & \vdots & a-3 \\ & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

若a=3 $\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ & 2 & -2 & \vdots & 6 \\ & & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ $r(A) = r(\overline{A}) = 2$

若a=1 $\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ & & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ $r(A) = 1, r(\overline{A}) = 2$

方程组有无穷多解的必要条件是|A|=0。

由 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-a \\ 3-2a & 2-a & 1 \\ 2-a & 2-a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2-a \\ 3-2a & a-1 & 1 \\ 2-a & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-a \\ 2-a & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-1)^2(3-a)$

对a=1

$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$

2．设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，求与矩阵A可交换的矩阵

[分析]所谓与A可交换，即AB=BA，显然 $AA^{-1} = A^{-1}A$，AO=OA，除去 A^{-1}，O之外还有那些矩阵与A可交换?

[解]设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 与A可交换，则

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{bmatrix}$

那么 $\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

对系数矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

n=4，r(A)=2
n-r(A)=2
基础解系有2个向量

令 $x_3=3t$，$x_4=u$，得 $x_2=2t$，$x_1=-3t+u$

所以 $\begin{bmatrix}-3t+u & 2t\\ 3t & u\end{bmatrix}$ t，u为任意实数

是与A可交换的所有矩阵。

n-r(A)=2

3．设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{bmatrix}$，齐次方程组Ax=0的基础解系有2个向量，求Ax=0的通解。

[解]A是 3×4 矩阵，Ax=0是4元齐次方程组，基础解系是2个向量，故 $4-r(A)=2$

$r(A)=2$，对A作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&a-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&a-2&-1&-1\\0&(a-1)^2&0&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=2\Leftrightarrow a=1$

$$A\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\ &1&1&1\\ & & &0\end{bmatrix}$$

令 $x_3=1$，$x_4=0$，得 $x_2=1$，$x_1=1$，有 $\eta_1=(1,-1,1,0)^T$

令 $x_3=0$，$x_4=1$，得 $x_2=-1$，$x_1=0$ 有 $\eta_2=(0,-1,0,1)^T$

通解 $k_1\eta_1+k_2\eta_2$，k_1，k_2 为任意常数。

4．已知 4×3 矩阵 $A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为4维列向量，若 $Ax=\beta$ 的通解为 $(1,2,-1)^T+k(1,-2,3)^T$，令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta+\alpha_3)$，求方程组 $By=\alpha_1-\alpha_2$ 的通解.

[解]（1）由解的结构，我们知 $r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=n-1=3-1=2$

AX=0 的基础解系有一个向量

（2）$(1,2,-1)^T$ 是方程组 $Ax=\beta$ 的解。即

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\beta\quad \beta=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$$

（3）$(1,-2,3)^T$ 是Ax=0的解，即

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=0\text{，}\quad \alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$$

从而 $r(B)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_3+\beta)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2$

从而

$$
\begin{gathered}
\text{由}(2)\beta\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出} \\
\text{故}\alpha_3+\beta\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出} \\
\downarrow
\end{gathered}
$$

$$r(B)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_3+\beta)=r(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=2$$

又因 $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_3+\beta)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-\alpha_2$

即 $(1,-1,0,0)^T$是 $By=\alpha_1-\alpha_2$ 的解，所以 $By=\alpha_1-\alpha_2$ 有解。$\alpha+k_1\eta_1+k_2\eta_2$

$$B\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_3+\beta)\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3\overset{(3)}{=}0$$

又由（2）知 $\alpha_3+\beta=\alpha_1+\alpha_2$

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_1+\alpha_2)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+0-(\alpha_1+\alpha_2)=0$$

通解 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

1．掌握有解，无解（非齐次），非0解（齐次）判定。
2．掌握求基础解系，通解的方法。
3．解的结构，解的性质。
4．会参数。