

基础班微积分辅导第 13 章
多元微分的应用: 极值与条件极值问题
二重积分

多元微分的应用: 极值与条件极值问题

13.1 二元函数的二阶泰勒公式

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial(x, y)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\Delta x \quad \Delta y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o((\Delta x^2 + \Delta y^2))$$

13.2 多元函数的极值

定义13.1 值与极值点: 设函数 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若存在点 $\bar{x}_0 \in D$ 某个邻域 U ,

$\forall \bar{x} \in U$ 都有 $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0)$ 则称 $f(\bar{x}_0)$ 是 $f(\bar{x})$ 的一个极小值 (minimum), 并称 \bar{x}_0 为 f 的一个极小值点.

类似地: 若 $\forall \bar{x} \in U$ 都有 $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_0)$ 则称 $f(\bar{x}_0)$ 是 $f(\bar{x})$ 的一个极大值 (maximum), 并称 \bar{x}_0 为 $f(\bar{x})$ 的一个极大值点.

定理13.1 极值点的必要条件: 设函数 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 $\bar{x}_0 \in D$ 达到极值, 若 f 在该点可微, 则有,

$$f'_i(\bar{x}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

或者

$$\text{grad} f(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\bar{x}_0)}{\partial x_n} \right)^T = 0.$$

定理13.2 极值点的充分条件: 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $M_0 \in \mathbb{R}^n$ 点某邻域 $U(M_0)$ 内二阶偏导数连续, 且 M_0 是驻点, 即 $\text{grad} f(M_0) = 0$, 则

- (1) $H_f(M_0)$ 正定时, M_0 是 $f(\bar{x})$ 的极小值点;
- (2) $H_f(M_0)$ 负定时, M_0 是 $f(\bar{x})$ 的极大值点;
- (3) $H_f(M_0)$ 不定时, M_0 不是 $f(\bar{x})$ 的极值点. 其中 $H_f(M_0)$ 为 $f(\bar{x})$ 在 M_0 处的海森矩阵.

例13.1 求函数 $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$ 的所有局部极值.

答案: 极小值点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$

例13.2 设 $u(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有二阶连续偏导数, 在 $x^2 + y^2 < 1$ 内满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

且在 $x^2 + y^2 = 1$ 上, $u(x, y) \geq 0$, 证明: 当 $x^2 + y^2 \leq 1$ 时, $u(x, y) \geq 0$ 。(提示: 可用反证法证明)

例13.3 求函数 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的极值. 答案: $(0, 0)$ 为极大值点, 极大值为 1

例13.4 求函数 $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ 的极值. 答案: 极小值为 0, 极大值 e^{-1} 。

例13.5 (隐函数的极值) 设 $z = z(x, y)$ 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 确定, 求该函

数的极值. 答案: $(-2, 0)$ 点是极小值点; $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$ 点是极大值点.

13.3 条件极值

$$\begin{cases} \text{Min(Max)} f(\vec{x}) \\ \text{s.t. } \vec{x} \in \Omega \end{cases}$$

目标函数 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 约束条件: $\vec{x} \in \Omega \subset D$.

例13.6 今有一空间曲面 $F(x, y, z) = 0$ 及一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 在此曲面上找一点

$P(x, y, z)$ 到 P_0 点距离最小。

$$\begin{cases} \text{Min } f(\vec{x}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ \text{s.t. } F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

今有一空间曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 及一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 在此曲线上找一点 $P(x, y, z)$ 到

P_0 点距离最小。

$$\begin{cases} \text{Min } f(\vec{x}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \\ \text{s.t. } F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

- 有一个约束条件的条件极值问题; $\begin{cases} \text{Min(Max)} f(x, y) \\ \text{s.t. } F(x, y) = 0 \end{cases}$

定理13.3 引入拉格伦日函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$$

条件极值问题的极值点一定是拉格伦日函数的驻点。

条件极值问题变成求函数的无条件极限问题: $\text{Min } L(x, y, \lambda)$,

$$\text{求驻点: 解方程: } \begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = F(x, y) = 0 \end{cases}$$

- 有两个约束条件的条件极值问题: $\begin{cases} \text{Min(Max)} f(x, y, z) \\ \text{s.t. } F(x, y, z) = 0; G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

引入拉格伦日函数: $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) + \mu G(x, y, z)$

求驻点: 解方程: $\text{grad } L(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$

即条件极值问题的极值点一定是拉格伦日函数的驻点。

例13.7 今有一空间曲面 $F(x, y, z) = 0$ 及一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 在此曲面上找一点

$P(x, y, z)$ 到 P_0 点距离最小。

$$\text{问题: } \begin{cases} \text{Min } f(\vec{x}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \\ \text{s.t. } F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{拉格伦日函数: } L(x, y, z, \lambda) &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} + \lambda F(x, y, z) \\ &= r + \lambda F(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\text{其中, } r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

$$\text{求驻点: } \begin{cases} \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r} + \lambda \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r} + \lambda \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r} + \lambda \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, z, \lambda)}{\partial \lambda} = F(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

$$\text{或者 } \begin{cases} \frac{\vec{r}}{r} + \lambda \text{grad } F(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{r}_0(P_0P) = -\lambda \text{grad } F(x, y, z) \\ F(P) = 0 \end{cases}$$

例13.8 求原点到曲面 $z^2 = xy + x - y + 4$ 的最短距离. 答案: $\sqrt{5}$.

例13.9 有一空间曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 及一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 在此曲线上找一点 $P(x, y, z)$

到 P_0 点距离最小.

问题: $\begin{cases} \text{Min } f(\vec{x}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \\ \text{s.t. } F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

拉格伦日函数: $L(x, y, z, \lambda) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} + \lambda F(x, y, z) + \mu G(x, y, z)$
 $= r + \lambda F(x, y, z) + \mu G(x, y, z)$

其中, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

求驻点: $\frac{\vec{r}}{r} + \lambda \text{grad } F(x, y, z) + \mu \text{grad } G(x, y, z) = 0$.

例13.10 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形: 绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大. 答案: $x = p/2, y = 3p/4$ 时体积最大.

例13.11 当 x, y, z 都大于0时, 求 $u = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值. 并证明对任意正实数 a, b, c , 下述不等式成立: $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$.

13.4 多元函数的最大值、最小值及其简单应用

例13.12 求 $z = xy(4-x-y)$ 在 $x=1, y=0, x+y=6$ 所围闭区域 \bar{D} 上的最大值.

答案: $z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$ 最大; $z(3, 3) = -18$ 最小.

例13.13 在平面直角坐标系中已知三点 $P_1(0,0), P_2(1,0), P_3(0,1)$, 试在三角形 $P_1P_2P_3$

所围的闭区域 \bar{D} 中求一点 $P(x, y)$, 使它到 P_1, P_2, P_3 三点的距离平方和为最小.

答案: f 在 $(1,0), (0,1)$ 点取到最大值, 在 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 点取到最小值.

例13.14 面积分 $I = \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2+z^2=1} \frac{dS}{1+x^4+y^4+z^4}$ 的取值范围是 (C).

(A) $0 \leq I \leq 1$; (B) $1 \leq I \leq 2$; (C) $2 \leq I \leq 3$; (D) $3 \leq I \leq 4$;

$(1+x^4+y^4+z^4)$ 在约束条件 $1=x^2+y^2+z^2$ 下的最大值为 $\frac{4}{3}$, 最小值为 2.)

例13.15 求抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线(椭圆)到原点的最长距离和最短距离.

13.5 近两年的考题

例13.16 由 $e^z = xy + yz + zx$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 存在的充分条件是_____ ,

曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程为_____ , $z = f(x, y)$ 在点

$(1,1,0)$ 处的梯度为_____。

答案: $x+y \neq e^z$, 切平面方程: $x+y+z=2$, $\text{grad}f(1,1) = -(i+j)$ 。

例13.17 求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值。

答案: 最大值为 3, 最小值为 -2。

例13.18 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在

约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 【 D 】

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

例13.19 (07) 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$$

上的最大值和最小值。 案: $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 8, 最小值为 0

二重积分

13.6 二重积分的定义及性质

定义13.2 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 $D \subset R^2$ 上有定义, 且有界, 若:

(1) 任意分割区域 D , 记 $\lambda_i = \sup_{X, Y \in \Delta D_i} \|X - Y\|$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$;

(2) 任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i$, $i = 1, \dots, n$, 得到 $f(\xi_i, \eta_i)$;

(3) 作和式 $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 其中 $\Delta\sigma_i$ 为 ΔD_i 的面积;

(4) 若极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 存在, 且极限值与区域 D 分割的任意性和点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i$, $i = 1, \dots, n$, 选值的任意性无关, 则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积, 该极限值 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 称为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

D 称为积分区域, $f(x, y)$ 称为被积函数, x, y 称为积分中间变量, 面积元素 $d\sigma$ 又记作 $dxdy$. 二重积分的值与积分中间变量的符号无关:

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(u, v) dudv$$

● 简单性质: 线性性, 保序性, 估值性, 中值定理, 对积分区域的可加性

(1) 对积分区域的可加性: 设 $f(x, y)$ 在区域 D_1 和 D_2 上可积, $D_1 \cup D_2$ 无内点, 则 $f(x, y)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上可积, 且

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) dxdy$$

(2) 对被积函数满足线性性:

$$\iint_D [Af(x, y) + Bg(x, y)] dxdy = A \iint_D f(x, y) dxdy + B \iint_D g(x, y) dxdy$$

(3) 保序性: 若可积函数 $f(x, y) \geq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$, 则

$$\iint_D f(x, y) dxdy \geq \iint_D g(x, y) dxdy$$

若可积函数 $f(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in D$, 则 $\iint_D f(x, y) dxdy \geq 0$.

(4) 若 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 则 $|f(x, y)|$ 在 D 上也可积, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) dxdy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dxdy$$

(5) 估值定理: 若可积函数 $f(x, y)$ 在 D 上满足 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) dxdy \leq MS_D$$

其中 S_D 为 D 区域的面积. 进一步, 若函数 $g(x, y)$ 在 D 上非负可积, 则

$$m \iint_D g(x, y) dxdy \leq \iint_D f(x, y) g(x, y) dxdy \leq M \iint_D g(x, y) dxdy$$

(6) 中值定理: 若函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, $g(x, y)$ 在 D 上取定号且可积, 则 $\exists (\xi, \eta) \in D$, 使

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dxdy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) dxdy$$

特别地, $g(x, y) \equiv 1$ 时, $\exists (\xi, \eta) \in D$ 使

$$\iint_D f(x, y) dxdy = f(\xi, \eta) \iint_D dxdy = f(\xi, \eta) S_D$$

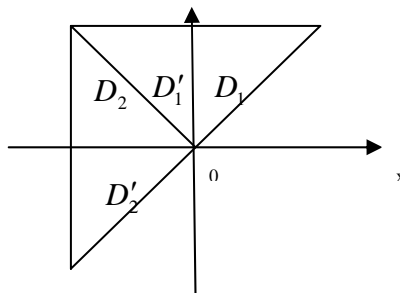
其中 $S_D = \iint_D dx dy$ 为 D 区域的面积.

(7) 若 D 区域关于 x 轴对称, 可积函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

若 D 区域关于 x 轴对称, 可积函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x, -y) = f(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$$



例13.22 设 D 是平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ 三点为顶点的三角形区域. D_1 为其在第一象限的部分, 则积分 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于_____.

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$; (B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$;

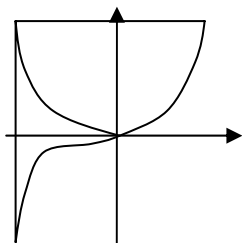
(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$; (D) 0

答案 (A).

例13.23 函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续非负, 若 $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$, 则 $f(x, y) \equiv 0$.

证明思路: 反证法.

例13.24 设积分区域 $D: x^2 + y^2 \leq r^2$, 则二重积分 $\iint_D (x^3 + \sin y + 1) dx dy =$ _____.



答案: πr^2 (积分区域的对称性与被积函数的奇偶性).

例13.25 $f(t)$ 为连续函数, D 是由 $y = x^3$, $y = 1$, $x = -1$ 围成的区域, 则

$$\iint_D xy \cdot f(x^2 + y^2) dx dy =$$

答案: 0

例13.26 设 $f(x, y)$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leq r^2$ 上连续, 且 $f(0,0) = 2$,

则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{r^2} =$$

答案: $= 2\pi$

例13.27 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 利用二重积分证明:

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

其中等号当且仅当 $f(x)$ 为常数时成立.

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ 上的连续函数 $[f(x) - f(y)]^2 \geq 0$, 等号当且仅当 $f(x)$ 为常数时成立. 考虑

$$\begin{aligned}
 0 \leq I &= \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = \int_a^b dx \int_a^b f^2(x) dy + \int_a^b dx \int_a^b f^2(y) dy - 2 \int_a^b dx \int_a^b f(x)f(y) dy \\
 &= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy - 2 \int_a^b dx \int_a^b f(x)f(y) dy \\
 &= 2(b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2
 \end{aligned}$$

故 $\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$, 其中等号当且仅当 $f(x)$ 为常数时成立.

例13.28 将积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化成累次积分, 其中 $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2ax \\ x^2 + y^2 \leq 2ax + 2ay, a > 0. \\ x \geq y \end{cases}$

答案: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^a dx \int_{a-\sqrt{2a^2-(x-a)^2}}^x f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{a-\sqrt{2a^2-(x-a)^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$

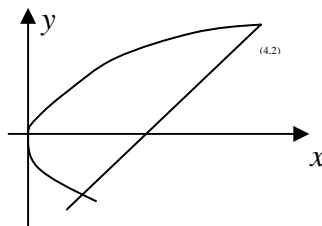
例13.29 交换积分 $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$ 的积分次序.

答案:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$$

例13.30 计算 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$. 答案: $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$

例13.31 求 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx$. 答案: $\frac{e-1}{2}$.



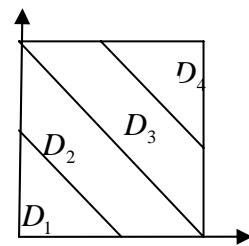
例13.32 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中积分区域 D 是由抛物线 $x = y^2$ 与直线 $x - y - 2 = 0$ 所围成.

$$\frac{45}{8}.$$

例13.33 求 $I = \iint_D [x + y] dx dy$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$,

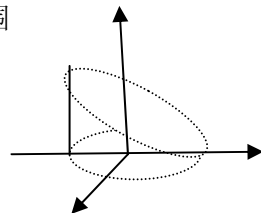
$[x + y]$ 为取整函数.

答案: 6



例13.34 求椭圆柱 $4x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 1 - y$ 及 $z = 0$ 所围

区域的体积. 答案: $\frac{\pi}{2}$



例13.35 证明 $\int_0^a dx \int_0^x f(y) dy = \int_0^a (a - x) f(x) dx$ ($a > 0$)

证明思路: 二重积分交换积分次序

13.7 坐标变换: 在极坐标系下的二重积分化为二次积分

若积分区域 D 在极坐标下的表达形式为

$$D_{\rho\varphi} = \{(\rho, \varphi) | \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

则二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$

这是在极坐标系下的二重积分化为二次积分的公式.

例13.36 求极限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\varepsilon^2 < x^2 + y^2 \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$. 答案: $-\pi$

例13.37 计算由曲面 $z_1 = 2 - x^2 - y^2$ 与 $z_2 = x^2 + y^2$ 所围成的空间的体积. 答案: π

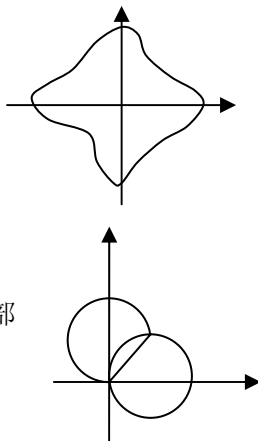
例13.38 求闭曲线 $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$ 所围区域的面积.

【解】 闭曲线 $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$ 的极坐标方程为

$$\rho = \sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \text{ 答案: } \frac{3}{4}\pi$$

例13.39 求 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq ax$ 与 $x^2 + y^2 \leq ay$ 的公共部

分 ($a > 0$). 答案: $\frac{a^3}{16} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$



13.8 重积分的应用

(1) 曲面面积

● 设空间曲面的方程为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, 则

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

● 设空间曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 由隐函数 $F(x, y, z) = 0$ 确定, 则

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \frac{dx dy}{|F_z|},$$

● 设空间曲面的参数方程为 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D_{uv}$,

则曲面的面积为 $S = \iint_{D_{uv}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$

$$\text{其中 } A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

例13.40 求球面的面积. 答案: $4\pi R^2$

● 质量中心问题

(2) 板状物体 D 的质心 (\bar{x}, \bar{y}) : $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$,

其中 $M_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \quad M_x = \iint_D y \rho(x, y) dx dy, \quad M = \iint_D \rho(x, y) dx dy,$

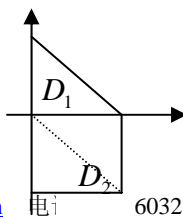
D 为区域, $\rho(x, y)$ 为板状物体的质量点密度.

例13.41 计算 $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

答案: 0

例13.42 不计算, 判断二重积分 $\iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy$ 的正负号. 答案: 负

例13.43 不计算, 判断二重积分 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x + y) dx dy$. 答案: 正.



例13.44 设 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

计算: $\iint_D |2xy - 1| dx dy$. 答案: $= \frac{1}{4}(2\ln 2 + 1)$.

13.9 近两年的考题

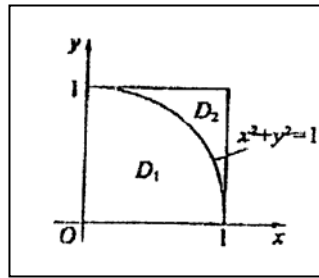
例13.45 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$

的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$. 答案: $\frac{3}{8}$.

例13.46 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

答案: $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.



例13.47 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于 【C】

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

例13.48 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

答案: 利用对称性, $\frac{\pi}{2} \ln 2$

例13.49 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域. 答案: $\frac{2}{9}$

面区域. 答案: $\frac{2}{9}$

例13.50 设 $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数,

则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$ (D)

(A) $ab\pi$; (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$; (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

答案: 轮换对称性, $\frac{a+b}{2}\pi$

例13.51 (07) 数学二 (22) (本题满分 11) 设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases},$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

答案: $\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$

例13.52 (07) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 (B).

- (A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$
 (C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

基础班微积分辅导第 14 章 三重积分, 第一类曲线积分

三重积分: 概念、性质、计算及应用

14.1 三重积分的概念及性质

定义14.1 设函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭区域 $\Omega \subset R^3$ 上有定义, 且有界, 若:

- (1) 任意分割区域 Ω , 记 $\lambda_i = \sup_{X, Y \in \Delta\Omega_i} \|X - Y\|$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$;
 (2) 任取 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \in \Delta\Omega_i$, $i = 1, \dots, n$, 作和式 $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i$, 其中 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积;

- (3) 若极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta\sigma_i$ 存在, 且极限值与区域 Ω 分割的任意性和点 $(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \in \Delta\Omega_i$, $i = 1, \dots, n$, 选值的任意性无关, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上可积, 该极

限值 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta\sigma_i$ 称为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i.$$

Ω 称为积分区域, $f(x, y, z)$ 称为被积函数, x, y, z 称为积分中间变量, 体积元素 dV 又记作 $dx dy dz$. 三重积分的值与积分中间变量的符号无关:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(u, v, w) du dv dw$$

- 连续函数一定在有界区域内可积
- 简单性质: 线性性, 保序性, 估值性, 中值定理, 对积分区域的可加性

- (2) 对积分区域的可加性: 设 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω_1 和 Ω_2 上可积, $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 无内点, 则 $f(x, y, z)$ 在 $\Omega_1 \cup \Omega_2$ 上可积, 且

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

(3) 对被积函数满足线性性:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} [Af(x, y, z) + Bg(x, y, z)] dx dy dz = \\ A \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz + B \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

(3) 保序性: 若可积函数 $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \Omega$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \geq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz.$$

若可积函数 $f(x, y, z) \geq 0$, $\forall (x, y, z) \in \Omega$, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \geq 0$.

(4) 若 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 则 $|f(x, y, z)|$ 在 Ω 上也可积, 且

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dx dy dz.$$

(5) 估值定理: 若可积函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上满足 $m \leq f(x, y, z) \leq M$, 则

$$mV_{\Omega} \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \leq MV_{\Omega}$$

其中 V_{Ω} 为 Ω 区域的体积. 进一步, 若函数 $g(x, y, z)$ 在 Ω 上非负可积, 则

$$m \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz \leq M \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz$$

(7) 中值定理: 若函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, $g(x, y, z)$ 在 Ω 上取定号且可积, 则 $\exists(\xi, \eta, \varsigma) \in \Omega$, 使

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \varsigma) \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz$$

特别地, $g(x, y, z) \equiv 1$ 时, $\exists(\xi, \eta, \varsigma) \in \Omega$ 使

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \varsigma) \iiint_{\Omega} dx dy dz = f(\xi, \eta, \varsigma) V_{\Omega}$$

其中 $V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ 为 Ω 区域的体积.

(7) 若 Ω 区域关于 $x-y$ 平面对称, 可积函数 $f(x, y, z)$ 满足 $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$$

若 Ω 区域关于 $x-y$ 平面对称, 可积函数 $f(x, y, z)$ 满足 $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dx dy dz$$

其中 Ω_1 为 Ω 的上半区域.

14.2 三重积分的计算——化成累次积分

● 若三重积分的积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$, 其中

$$D_{xy} = \{(x, y) | y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

则三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

若三重积分的积分区域 $\Omega = \{(x, y, z) | c \leq z \leq d, (x, y) \in D_z\}$, 则三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

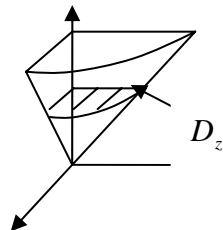
例14.1 求 $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz$, $\Omega = \{(x, y, z) | x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

答案: $\frac{1}{12}$

例14.2 求 $\iiint_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, 其中 Ω 为锥面 $\left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$

与平面 $z=c$ ($c>0$) 所围成的区域在第一卦限的部分.

答案: $\frac{a^2 b^2 \sqrt{c}}{36}$



14.3 坐标变换

● 在柱坐标系下的三重积分化为三次积分

若三重积分积分区域 Ω 在柱坐标系下的表达式为

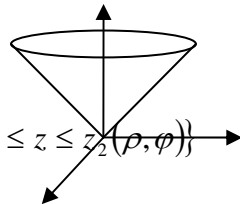
$$\Omega = \{(\rho, \varphi, z) | \alpha \leq \varphi \leq \beta, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), z_1(\rho, \varphi) \leq z \leq z_2(\rho, \varphi)\}$$

则三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho dz$$

例14.3 求 $\iiint_{\Omega} (1+x^2+y^2)z dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq H\}$.

答案: $\pi \left(\frac{H^4}{4} + \frac{H^6}{12} \right)$



例14.4 设 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2+y^2)] dx dy dz$, 其中

$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq h, x^2+y^2 \leq t^2\}$ ($t>0$). 求 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

答案: $\frac{\pi h^3}{3} + \pi h f(0)$.

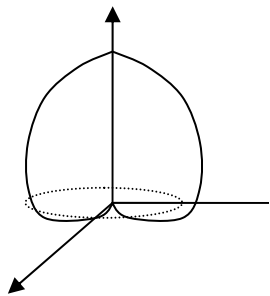
● 在球坐标系下的三重积分化为三次积分

$$\text{球坐标系为} \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} r \geq 0 \\ \text{其中 } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix}$$

若三重积分的积分区域 Ω 在球坐标系下的表示为 Ω^* , 则三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega^*} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

例14.5 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 与极轴所围的图形绕极轴旋转所得的体积.



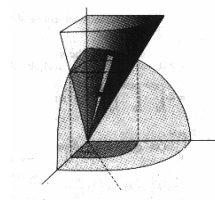
【解】 $\Omega^* = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

$$V = \iiint_{\Omega^*} 1 \cdot dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \sin \theta dr = \frac{8}{3} \pi a^3.$$

例14.6 求三重积分

分: $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$, 其中

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2 - z^2} \\ z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \right\}. \quad \text{答案: } \frac{\pi}{8}$$



例14.7 已知 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 $f(u)$ 为可微函数, 求 $F'(t)$.

答案: $F'(t) = 4\pi f(t^2)t^2$

14.4 重积分的应用

(1) 板状物体 D 的质心 (\bar{x}, \bar{y}) : $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \bar{y} = \frac{M_x}{M}$,

其中 $M_y = \iint_D x\rho(x, y) dx dy, M_x = \iint_D y\rho(x, y) dx dy, M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$,

D 为区域, $\rho(x, y)$ 为板状物体的质量点密度.

Ω 的质量密度为 $\rho(x, y, z)$, 则其质量中心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为 $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$

$$M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dx dy dz, M_{zx} = \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) dx dy dz,$$

其中

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z) dx dy dz, M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

例14.8 求均匀半球 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ 的重心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

答案: $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{3}{8}R$

(2) 转动惯量问题

空间物体 Ω 的质量点密度为 $\rho(x, y, z)$, 其绕 x 轴, y 轴, z 轴的转动惯量分别为

$$J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$J_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

(3) 万有引力问题

空间物体 Ω 的质量点密度为 $\rho(x, y, z)$, 空间中一点 (x_0, y_0, z_0) 有质量为 m 的质点, 则空间物体对质点的万有引力问题为 (F_x, F_y, F_z)

$$F_x = \iiint_{\Omega} km \frac{(x-x_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$$

$$F_y = \iiint_{\Omega} km \frac{(y-y_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$$

$$F_z = \iiint_{\Omega} km \frac{(z-z_0)\rho(x,y,z)}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$$

例14.9 改变 dx, dz 的积分次序, $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z) dz$

答案: $\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y,z) dx + \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z) dx$

例14.10 设 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, 其中 $f(u)$ 连续, 且

$$f'(0)=1, f(0)=0. \text{ 求 (1) } F'(t); \text{ (2) } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^5}.$$

答案: $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2); \frac{4\pi}{5}$

例14.11 求 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x-y+z+2\sqrt{3}) dx dy dz$. 答案: $2\sqrt{3} \cdot \frac{4}{3}\pi$

例14.12 设 $f(x) \in C[0,1]$, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^3.$$

例14.13 证明: $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(z) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(t)(1-t^2) dt$

例14.14 设 $f: \Omega \subset R^3 \rightarrow R$, $f \in C^1(\Omega)$, 且 $A = \max_{P \in \Omega} (f(P))$,

$$\forall P \in \Omega, \|grad f\| \leq M, \text{ 证明: } I = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dv \leq A + \frac{R}{4} M, \text{ 其中, } V \text{ 是}$$

域 Ω 的体积, $\forall P \in \Omega, \exists P_0 \in S$.

14.5 近两年的考题

例14.15 (03_1) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,

$$F(t) = \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2) d\sigma}$$

其中 $\Omega(t) = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq t^2\}$. 讨论 $F(t)$ 在区间

$(0, +\infty)$ 内的单调性.

$$\text{证明: (1) } F(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^t f(r^2) r^2 \sin \theta dr}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho} = \frac{4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho} = 2 \frac{\int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho}$$

$$F'(t) = 2 \frac{f(t^2) t^2 \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho - f(t^2) t \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\left(\int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho \right)^2} \geq 0$$

$F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调增。

第一类曲线积分: 概念、性质、计算及应用

(1) 第一类曲线积分的定义与性质

● 设弧段 \widehat{AB} (记作 L) 是 R^3 中的一条逐段光滑的曲线, 函数 $f(x, y, z)$ 定义在 L 上. 把 L 任意地分成 n 个子弧段, $P_{i-1}P_i$, $i=1, 2, \dots, n$, $P_0=A, P_n=B$, 每一段子弧段的弧长分别为 Δl_i , 在每一段子弧段上分别任取一点 $Q_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$, 作 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta l_i$$

再记 $\lambda = \max\{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n\}$. 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述 Riemann 和的极限存在, 且该极限值与子弧段的分法和点的取法无关, 则称该极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲线 $\widehat{AB}(L)$ 上的第一类曲线积分, 记作

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dl = \int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta l_i$$

函数 $f(x, y, z)$ 为被积函数, $\widehat{AB}(L)$ 为积分路径, dl 为弧微分, $dl > 0$.

Riemann 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta l_i$ 的极限存在, 且该极限值与子弧段的分法和点的取法无关

的充分条件是 $f(x, y, z)$ 在曲线 $\widehat{AB}(L)$ 上连续.

● 第一类曲线积分的性质:

1. $\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\widehat{BA}} f(x, y, z) dl$.
2. 若 $L = L_1 \cup L_2$, 则 $\int_L f(x, y, z) dl = \int_{L_1} f(x, y, z) dl + \int_{L_2} f(x, y, z) dl$
3. $\int_L [\lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z)] dl = \lambda \int_L f(x, y, z) dl + \mu \int_L g(x, y, z) dl$
4. 若 $f(x, y, z)$ 在曲线 $\widehat{AB}(L)$ 上连续, 则存在 $(\xi, \eta, \varsigma) \in L$ 使 $\int_L f(x, y, z) dl = f(\xi, \eta, \varsigma) L$, 其中 L 为曲线的弧长.

(2) 第一类曲线积分的计算

设曲线 L 的参数方程为
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

又设 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上连续, 则弧长微分

$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$, 第一类曲线积分可按下式计算:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

特别在 X - Y 平面上, 有依赖于弧长微分不同表达的三种计算模式:

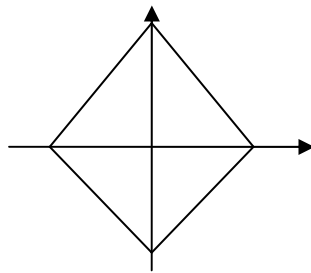
$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad dl = \sqrt{1 + [y'_x]^2} dx, \quad dl = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2} d\varphi$$

上述第 3 个公式是基于极坐标 $\rho = \rho(\varphi)$.

注意: 第一类曲线积分化成定积分时, 积分下限一定小于积分上限.

例 14.16 求 $\oint_L xy dl$, 其中 L 是正方形 $|x| + |y| = a$, ($a > 0$).

答案: 0



例 14.17 (98) 设 L 为椭圆 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$, 其周长为 a , 求

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) dl. \quad \text{答案: } 12a$$

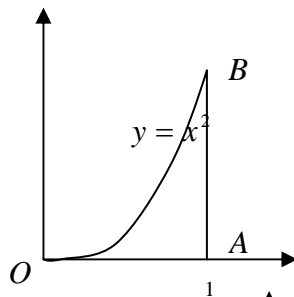
例 14.18 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 求 $\oint_L x^2 dl$.

答案: $\frac{2}{3}\pi R^3$

例 14.19 计算 $\int_L xy dl$, 其中 L 是封闭路径 $OABO$.

$$\text{【解】} \quad \int_L xy dl = \int_{OA} xy dl + \int_{AB} xy dl + \int_{BO} xy dl$$

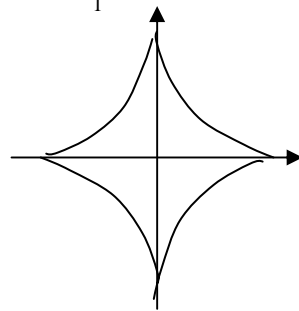
$$\int_{OA} xy dl = \int_{OA} 0 \cdot dl = 0, \quad \int_{AB} xy dl = \int_0^1 1 \cdot y dy = \frac{1}{2},$$



$$\int_{BO} xy dl = \int_0^1 x \cdot x^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$

例 14.20 求 $\oint_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl$, 其中 L 为星型线, 其方程为

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \quad \text{答案: } 4a^{\frac{7}{3}}$$



例 14.21 求 $\oint_L (x + y) dl$, 其中双纽线的右半支, L 的参数方程为

$$x = r(\theta) \cos \theta, \quad y = r(\theta) \sin \theta, \quad r(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

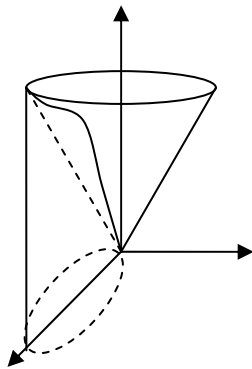
答案: $\sqrt{2}a^2$.

例14.22 求圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 被抛物面 $z = c - x^2$ 及 $z = 0$ 所截成的一段的侧面积. 答案: $2\pi Rc - \pi R^3$.

● 第一类曲面积分可以求柱面面积

例14.23 设圆柱螺旋线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 的密度分布与 x, y 无关, 而与 z 成正比, 求着一段圆柱螺旋线的质量与质量中心.

答案: $\bar{x} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right), \bar{y} = \frac{8}{\pi^2}, \bar{z} = \frac{\pi}{3}$.



例14.24 (89) 平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则

$$I = \int_L (x^2 + y^2) dl = (\pi).$$

设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

又设 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上连续, 则弧长微分

$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$, 第一类曲线积分可按下式计算:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

特别在 $X-Y$ 平面上, 有依赖于弧长微分不同表达的三种计算模式:

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad dl = \sqrt{1 + [y'_x]^2} dx, \quad dl = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho(\varphi)]^2} d\varphi$$

上述第3个公式是基于极坐标 $\rho = \rho(\varphi)$.

注意: 第一类曲线积分化成定积分时, 积分下限一定小于积分上限.

例14.25 求 $I = \int_L z dl$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ y = ax \end{cases}$, 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(a, a, \sqrt{2}a)$.

答案: $\frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25+4\sqrt{38}}{17} \right)$

基础班微积分辅导第15章

第二类曲线积分与第一类曲面积分

第二类曲线积分定义、性质、计算

15.1.1 第二类曲线积分的定义与性质

定义15.1 向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ 定义在空间区域

$\Omega \subset R^3$ 中的一条逐段光滑的有向弧段 \widehat{AB} (记作 L) 上. L 的方程为

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. 把有向弧段 \widehat{AB} 从 A 到 B 任意地分成 n 个子有向弧段,

$P_{i-1} \widehat{P}_i, i = 1, 2, \dots, n, P_0 = A, P_n = B$, 记 $\Delta \mathbf{l}_i = \overrightarrow{P_{i-1} P_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$. 在每一段子有向弧段上分别任取一点 $Q_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ (参数为 t_i), 作 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \cdot \Delta \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^n [X(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta x_i + Y(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta y_i + Z(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta z_i]$$

再记 $\lambda = \max\{\|\Delta \mathbf{l}_1\|, \|\Delta \mathbf{l}_2\|, \dots, \|\Delta \mathbf{l}_n\|\}$. 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述 Riemann 和的极限存在, 且该极限值与子弧段的分法和点的取法无关, 则称该极限为函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在有向曲线

$\widehat{AB}(L)$ 上从 A 到 B 的第二类曲线积分, 记作

$$\begin{aligned} \int_{L(A)}^B \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{L(A)}^B X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [X(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Y(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + Z(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i] \end{aligned}$$

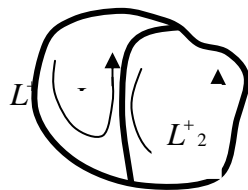
函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 为被积函数, 有向曲线 $\widehat{AB}(L)$ 为有向积分路径, $d\mathbf{l}$ 为有向弧微分
在空间, $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$; 在平面上, $d\mathbf{l} = (dx, dy)$

● 第二类曲线积分的性质:

1. $\int_{L(A)}^B \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = -\int_{L(B)}^A \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}.$

2. 若 A_1, A_2, A_3 为路径 L 上的三个点, 则

$$\int_{L(A_1)}^{A_3} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{L(A_1)}^{A_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} + \int_{L(A_2)}^{A_3} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \text{ 当}$$



L 为闭路径时, 规定逆时针方向为正, 记作 $\oint_{L^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}$. 在右图中,

$$\oint_{L^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_1^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} + \oint_{L_2^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l}$$

15.1.2 第二类曲线积分的计算

若 L 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, 起始点 A 与终止点 B 对应的参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = \beta$, 如果向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在区域 $\Omega (L \subset \Omega)$ 内连续, 则第二类曲线积分

$$\begin{aligned} \int_{L(A)}^B \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt \\ &= \int_{L(A)}^B X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

特别在 $X-Y$ 平面上, 有以下四种不同的计算模式:

$$\begin{aligned} \int_{L(A)}^B \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{L(A)}^B X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{L(A)}^B (\mathbf{F}(x, y) \bullet \boldsymbol{\tau}^0) dl, \\ &= \int_{L(A)}^B (X(x, y) \cos \alpha + Y(x, y) \cos \beta) dl, \\ &= \int_{L(A)}^B \|\mathbf{F}(x, y)\| \cos \theta \cdot dl, \end{aligned}$$

其中 $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{1 + [y'_x]^2} dx = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi$

$\boldsymbol{\tau}^0$ 为 L 的单位切向矢量, α 与 β 为 $\boldsymbol{\tau}^0$ 的两个方向角。

注意: 上述后三种形式反映了第二类曲线积分可化成第一类曲线积分, 或第一类曲线积分与第二类曲线积分的关系。

例11.1 求 $\int_{L^+} xdy$, 其中 L^+ 是上半单位圆周, 由 $(-1, 0)$ 到 $(1, 0)$. 答案: $-\frac{\pi}{2}$

例11.2 求 $I = \int_{L(A)}^{(B)} ydx + xdy + (x + y + z)dz$, 其中 $A(3, 5, 7), B(2, 3, 4)$, L 为由 A 点到 B 点的直线. 答案: 45

例11.3 设 L 为 $x^2 + y^2 = 9$ 正向(逆时针方向), 求

$$I = \oint_L (2xy - 2y + x^2)dx + (x^2 - 4x - y^2)dy \quad \text{答案: } -18\pi$$

例11.4 求 $I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

从 Ox 轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向. 答案: $2\pi a^2(\cos \alpha - \sin \alpha)$

在下一讲, 我们将用更简单的方法计算这个积分.

例11.5 求 $I = \oint_{L^+} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 其中 L^+ 为球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界线, 其方向为 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, 其中 $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$. 答案: -4

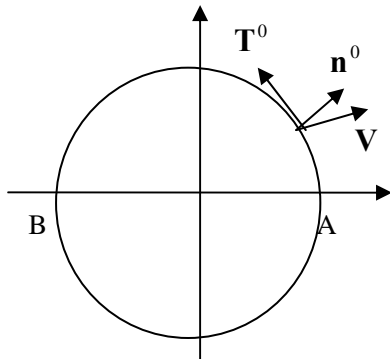
例11.6 平面流场 $\mathbf{V} = (x, -y)$, 求单位时间流过曲

线 L 的流量:

- (1) $L_1: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, 由下往上的流量;
- (2) $L_2: y = 0, -1 \leq x \leq 1$, 由下往上的流量;
- (3) $L_3: x^2 + y^2 = 1$, 由里往外的流量.

答案: $0, 0, 0$

$Q_1 = Q_2$ 并不是一个偶然现象, 在下一讲中, 我们可以发现这就是第二类曲线积分与路径无关的问题. $Q_3 = 0$ 也不是一个偶然现象, 因为 $\mathbf{V} = (x, -y)$ 是一个无源场.



例11.7 椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t$ 上每一点

$P(x, y)$ 处有作用力 $\mathbf{F}(x, y)$, 其方向指向椭圆圆心, 其模等于从点 P 到椭圆中心的距离.

(1) 求当质点 P 沿椭圆周在第一象限中的弧从点 $A(a, 0)$ 移动到点 $B(0, b)$ 时, 力 \mathbf{F} 所作的功.

(2) 求当质点 P 沿椭圆周正向一周时, 力 \mathbf{F} 所作的功. 答案: $W_1 = \frac{a^2 - b^2}{2}, W_2 = 0$

例11.8 (87) L 为 $x^2 + y^2 = 9$ 正向, 则 $I = \oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy = (\quad)$

若 L 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, 起始点 A 与终止点 B 对应的参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = \beta$, 如果向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在区域 $\Omega (L \subset \Omega)$ 内连续, 则第二类曲线积分

$$\begin{aligned} & \int_{L(A)}^B \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt \\ &= \int_{L(A)}^B X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \quad \text{答案: } -18\pi \end{aligned}$$

第一类曲面积分

15.2.1 第一类曲面积分的定义与性质

定义15.2 设 S 是 R^3 中的一块逐片光滑的曲面, 函数 $f(x, y, z)$ 定义在 S 上. 把 S 任意地分成 n 个小块 $\Delta S_i, i = 1, 2, \dots, n$, 每个小块的面积分别为 ΔS_i , 在每个小块上分别任

取一点 $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 作 Riemann 和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$

再记 λ 为所有 $\Delta S_i (i=1, 2, \dots, n)$ 直径的最大值. 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述 Riemann 和的极限存在, 且该极限值与小块的分法和点的取法无关, 则称该极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 S 上的第一类曲面积分, 记作

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

函数 $f(x, y, z)$ 为被积函数, S 为积分曲面, dS 为曲面的面积微分, $dS > 0$.

当 $f(x, y, z) = 1$ 时, 第一类曲面积分就是曲面的面积.

第一类曲面积分的性质:

$$1. \text{ 若 } S = S_1 \cup S_2, \text{ 则 } \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS$$

$$2. \iint_S [\lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z)] dS = \lambda \iint_S f(x, y, z) dS + \mu \iint_S g(x, y, z) dS$$

15.2.2 第一类曲面积分的计算

设空间曲面的方程为 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

当曲面的方程为其它形式时, 同样可以给出相应的公式.

设空间曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 由隐函数 $F(x, y, z) = 0$ 确定, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \frac{dx dy}{|F_z|},$$

设空间曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 由如下参数方程确定:

$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in D_{uv}$, 则第一类曲面积为

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS \\ = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

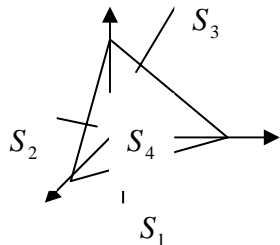
例11.9 求 $I = \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的四面体的四个面.

答案: $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)\ln 2$

例11.10 求 $I = \iint_S (x+y+z)^2 dS$, 其中 S 为单位球面. 答案: $I = 4\pi$

例11.11 求 $\iint_S |xyz| dS$, 其中 $S: z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$. 答案: $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$

例11.12 求质量密度为 $\rho = 1$ 的上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, (z \geq 0)$ 绕 z 轴旋转的转动



惯量 J_z . 答案: $J_z = \frac{4}{3} \pi R^4$

例11.13 S 是平面 $x + y + z = 1$ 截取球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的球冠部分, 则
曲面积分 $\iint_S (x - 2y - 2z)^2 dS = ?$ 答案: $3 \iint_S dS$.

例11.14 (07) 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列小于零的是:
(B).

(A) $\int_T f(x, y) dx$

(B) $\int_T f(x, y) dy$

(C) $\int_T f(x, y) ds$

(D) $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$

基础班微积分辅导第 16 章 第二类曲面积分与场论

第二类曲面积分

16.1 第二类曲面积分

16.1.1 第二类曲面积分的定义与性质

定义15.1 设向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ 定义在 $\Omega \subset R^3$ 上, S 是 Ω 中的一块逐片光滑的可定向曲面, 其正向为 \mathbf{S}^+ . 把 \mathbf{S}^+ 任意地分成 n 个有向小块 $\Delta \mathbf{S}_i^+ = (\Delta S_i, \mathbf{n}_i^0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其中 ΔS_i 分别为每个小块的面积, \mathbf{n}_i^0 为 ΔS_i 内任意一点 $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 处曲面的单位正法向量. 作 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i$$

再记 λ 为所有 ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 直径的最大值. 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上述 Riemann 和的极限存在, 且该极限值与有向小块的分法和点 $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的取法无关, 则称该极限为向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在有向曲面 \mathbf{S}^+ 上的第二类曲面积分, 记作

$$\iint_{\mathbf{S}^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta \mathbf{S}_i$$

函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 为被积函数, \mathbf{S}^+ 为积分曲面(有向), $d\mathbf{S}$ 为曲面的有向面积微分.

若记单位正法向量 $\mathbf{n}_i^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, (α, β, γ 分别为单位正法向量与三个坐标轴的夹角), 则上述第二类曲面积分又可记为

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}^0 dS \\ &= \iint_S [X(x, y, z) \cos \alpha + Y(x, y, z) \cos \beta + Z(x, y, z) \cos \gamma] dS \end{aligned}$$

上式等号的右端为第一类曲面积分. 若记

$$dy \wedge dz = \cos \alpha dS, \quad dz \wedge dx = \cos \beta dS, \quad dx \wedge dy = \cos \gamma dS$$

分别称为 dS 在 yz, zx, xy 平面上的有向投影 ($\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 可正可负, 因此 $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ 也可正可负),

$$dx \wedge dy = \cos \gamma dS = \begin{cases} d\sigma_{xy}, & 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \\ -d\sigma_{xy}, & \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi \end{cases}$$

其中 $d\sigma_{xy} \geq 0$ 为 dS 在 xy 平面上的投影, 所以第二类曲面积分也可以记成

$$\iint_{S^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S^+} X(x, y, z) dy \wedge dz + Y(x, y, z) dz \wedge dx + Z(x, y, z) dx \wedge dy$$

第二类曲面积分的性质

1. 第二类曲面积分与曲面的方向有关: $\iint_{S^-} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$;

2. 若 $S = S_1 \cup S_2$, S, S_1, S_2 的正向一致, 则

$$\iint_{S^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S}$$

16.1.2 第二类曲面积分的计算

1. 曲面的法向量:

(1) 若曲面方程为 $z = f(x, y)$, 单位法向量 $\mathbf{n}^0 = \pm \frac{f'_x \mathbf{i} + f'_y \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}$,

(2) 若曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$, 单位法向量 $\mathbf{n} = \pm \frac{F'_x \mathbf{i} + F'_y \mathbf{j} + F'_z \mathbf{k}}{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$

(3) 若曲面方程为 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$, 单位法向量 $\mathbf{n}^0 = \pm \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, 其中

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

对于有向曲面, 曲面的正法向量指向曲面的正侧. 封闭曲面的正向为曲面的外侧.

3. 将 \mathbf{n}^0 代入第二类曲面积分中,

$$\iint_{S^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}^0 dS$$

不难将第二类曲面积分化为第一类曲面积分, 从而可用第一类曲面积分计算第二类曲面积分. 但更多的时候我们用第二类曲面积分本身的性质来算第二类曲面积分.

若曲面方程为

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D_{uv}$$

则 $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$, 第二类曲面积分

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}^0 dS \\ &= \pm \iint_{D_{uv}} [X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))A + Y(x(u, v), y(u, v), z(u, v))B \\ &\quad + Z(x(u, v), y(u, v), z(u, v))C] du dv \end{aligned}$$

例16.1 求 $\oint_{S^+} y^2 z dx \wedge dy$, 其中闭曲面 S^+ 为旋转抛物面

$z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围的空间区域的外侧面.

【解】 $\oint_{S^+} y^2 z dx \wedge dy = \frac{\pi}{3}$

例16.2 求 $\oint_{S^+} x dy \wedge dz$, 其中其中闭曲面 S^+ 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围的

空间区域的外侧面(如上题). 【解】 $\oint_{S^+} x dy \wedge dz = \frac{\pi}{2}$

例16.3 计算 $I = \iint_S |z| dS$, $J = \iint_S |z| dx \wedge dy$, 其中 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 外法线为曲面正向.

【解】 $I = 8a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi a^3$, $J = \iint_S |z| dx \wedge dy = \iint_{S_1} |z| dx \wedge dy + \iint_{S_2} |z| dx \wedge dy = 0$.

例16.4 求 $I = \oint_{S^+} \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧面. 答案: 4π .

例16.5 S 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 内的部分, 其中 $a > 0$, 求:

(1) $\iint_S z dS$; (2) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$. (0)

【解】 (1) $\frac{32\sqrt{2}}{9}$ (2) $\iint_S 0 dS = 0$.

例16.6 求 $\oint_{S^+} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, 其中 S^+ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

【解】 $= abc \iint_{D_{\varphi\theta}} (\sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \varphi) d\varphi d\theta = 4\pi abc$

例16.7 计算积分 $I = \iint_{S^+} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$

其中 S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 限于 $x^2 + y^2 - x \leq 0, z \geq 0$ 部分的外侧.

【解】 $I = \iint_{S^+} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = \frac{38}{105} + \frac{5}{32} \pi$

场 论: Green 公式, Guass 公式, Stokes 公式

16.2 场 论

16.2.1 数量值函数的梯度, 向量值函数的散度和旋度

1. 数量值函数的梯度

定义15.2 设数量值函数 $f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微, 则其在 (x_0, y_0, z_0) 点的梯度为:

$$\text{grad}f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

数量值函数的梯度为向量.

数量值函数的梯度的意义: 函数 $f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 点的梯度作为向量, 其方向为使函数 $f(x, y, z)$ 在该点的方向导数取得最大的方向; 其大小为这个最大的方向导数.

2. 向量值函数的散度

定义15.3 设向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ 在 (x_0, y_0, z_0) 点可

微, 则其在 (x_0, y_0, z_0) 点的散度为: $\text{div}\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)}$

向量值函数的散度为数量.

向量值函数的散度的意义: 反映流场在该点的源的情况.

3. 向量值函数的旋度

定义15.4 设向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微, 则其在 (x_0, y_0, z_0) 点的旋度为:

$$\text{rot}\mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

向量值函数的旋度为向量.

向量值函数的旋度的意义: 反映流场在该点的旋转的情况.

16.2.2 三个基本公式: Green, Guass, Stokes 公式

定理16.1 (Green 公式) 设 D 为平面上的有界连通闭区域, 记 ∂D 为 D 的有向边界, 其正方向的定义为: 沿 ∂D 的正方向走, D 区域在其左边. 若平面二元向量值函数 $\mathbf{F}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ 是 $C^{(1)}$ 类函数 (即 $X(x, y), Y(x, y)$ 在 D 上连续可微), 则

$$\int_{\partial D} Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy$$

定理16.2 (Guass 公式) $\Omega \subset R^3$ 为有界闭区域, 其边界面 $\partial\Omega$ 外侧为正, 向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)) \in C^{(1)}(\Omega)$, 则

$$\oiint_{\partial\Omega} Xdydz + Ydzdx + Zdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} (\text{div}\mathbf{F}) dv$$

定理16.3 (Stokes 公式) 有界曲面 S 分块光滑可定向, 其边界 ∂S 为分段光滑的闭曲线, \mathbf{S}^+ 与 $\partial\mathbf{S}^+$ 的方向满足右手螺旋法则, 向量值函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$

$$\text{在 } S \text{ 及 } \partial S \text{ 上是 } C^{(1)} \text{ 类, 则 } \oint_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S^+} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S^+} \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Green, Guass, Stokes 公式指出了第二类曲面积分, 第二类曲线积分与重积分之间的内在关系.

16.2.3 Green, Guass, Stokes 公式的应用

1. 计算问题

例16.8 L 为 $x^2 + y^2 = 9$ 正向, 则 $I = \oint_L (2xy - 2y + x^2)dx + (x^2 - 4x - y^2)dy = ?$

【解】 $I = \iint_D (2x - 4 - 2x + 2) dx dy = -2 \times 9\pi = -18\pi$

例16.9 求 $\int_L (1 + ye^x) dx + (x + e^x) dy$, 其中 L 为沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的上半周由 $A(a, 0)$ 到 $B(-a, 0)$.

【解】 $\int_L (1 + ye^x) dx + (x + e^x) dy = \frac{\pi}{2} ab - 2a$

若曲线本身不封闭, 可以通过添加辅助线的方法使其封闭, 然后再用 Green 公式简化计算.

例16.10 求 $\oint_C y dx + z dy + x dz$, $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. 从正 z 轴方向看, C 的正向为反时针方向.

【解】 $= -\sqrt{3}\pi a^2$.

例16.11 计算 $\oiint_S \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 外侧面.

【解】 $= \frac{1}{a} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} 3 dx dy dz = 4\pi a^2$

求 $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 穿过 $z^2 = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的流量.

【解】 $Q = \oiint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = \pi h^3$

例16.12 求 $I = \iint_S (x^3 + az^2) dy \wedge dz + (y^3 + ax^2) dz \wedge dx + (z^3 + ay^2) dx \wedge dy$,

S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上半球面上侧. 【解】 用 Gauss 公式. $(\frac{29}{20}\pi a^2)$

例16.13 设 $f(u)$ 连续可微, 计算积分

$$\oiint_{S^+} x^3 dy \wedge dz + \left[\frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dz \wedge dx + \left[\frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dx \wedge dy$$

其中 S^+ 为 $x > 0$ 的锥面 $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ 与球面 $y^2 + z^2 + x^2 = 1$, $y^2 + z^2 + x^2 = 4$ 围成的空间区域的边界面的外侧.

【解】 由 Gauss 公式, 答案: $\frac{93\sqrt{2}}{5}\pi$.

例16.14 设函数满足条件: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z)$, n 为正整数, 曲面

$S_1: f(x, y, z) = 0$, 与平面 $S_2: ax + by + cz = d$, 所围区域为 Ω , $\partial\Omega$ 取外法线作正向,

计算: $I = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

【解】 即所围体积: $|\Omega| = \frac{1}{3} H \cdot S$.

例16.15 求 $I = \oint_{L^+} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, 其中 L^+ 为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

从 $0x$ 轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向.

$$\text{【解】} = 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \iint_S dS = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

其中 $\iint_S dS = \pi a^2$ 为平面 $y = x \tan \alpha$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 部分内的面积.

例16.16 04_1) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$,

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

【解】 加曲面 $S: z = 0$, **Guass 公式**

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+S} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy &= \iiint_{\Omega} (6x^2 + 6y^2 + 6z) dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho^2} (6\rho^2 + 6z) dz \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_S 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy = \iint_S 3(z^2 - 1)dxdy = -3\pi$$

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy = \iiint_{\Omega} - \iint_S$$

2. 平面曲线积分与路径无关的条件

(1) 线积分与路径无关 \Leftrightarrow 封路积分为零 \Leftrightarrow 存在单值的原函数;

(2) 在单连通域中: 线积分与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$

例16.17 平面流场 $\mathbf{V} = (x, -y)$, 求单位时间流过曲

线 L 的流量:

(1) $L_1: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, 由下往上的流量;

(2) $L_2: y = 0, -1 \leq x \leq 1$, 由下往上的流量;

(3) $L_3: x^2 + y^2 = 1$, 由里往外的流量.

【解】 (1)

这是第二类曲线积分,

$$L_1: x = \cos t, y = \sin t, \quad t: 0 \rightarrow \pi,$$

$$Q_1 = \int_0^\pi [\cos^2 t - \sin^2 t] dt = 0$$

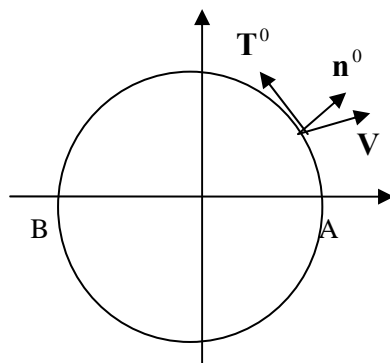
(2) $\mathbf{n}^0 = \mathbf{j}$,

$$Q_1 = \int_{L_2(A)}^{(B)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^0 dl = \int_{L_2(A)}^{(B)} (x, -y) \cdot (0, 1) dl = 0.$$

L_1^+, L_2^+ 构成上半圆域的外边界, 故由(1)自然能得到(2).

(3) 设 \mathbf{n}^0 为单位外法向量, L_3^+ 为单位圆周, 逆时针方向,

$$Q_3 = \int_{L_3} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^0 dl = \int_0^{2\pi} \mathbf{V} \cdot \frac{(dy, -dx)}{dl} dl = \int_0^{2\pi} (x, -y) \cdot (dy, -dx) = 0$$



例16.18 设 $Q(x, y)$ 在全平面上连续可微, 已知曲线积分 $\int_L 2xydx + Q(x, y)dy$ 与路径无关,

并且对于任意的 t , 有 $\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x, y)dy$. 求函数

$Q(x, y)$. 答案: $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$.

例16.19 已知函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数, 且对任意的光滑有向封闭曲面 Σ , 都有

$$\oiint_{\Sigma} e^x [f'(x)dy \wedge dz - 2yf(x)dz \wedge dx - ze^x dx \wedge dy] = 0.$$

(1) 证明对任意的 x 都有 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = e^x$;

(2) 当 $f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{3}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的表达式。

例16.20 已知积分 $\int_L (x + xy \sin x)dx + \frac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关, $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,

(1) 求 $f(x)$;

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求函数 $u = u(x, y)$ 使得 $du = (x + xy \sin x)dx + \frac{f(x)}{x}dy$;

(3) 对(1)中求得的 $f(x)$, 求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi, 1)$ 到 $B(2\pi, 0)$ 的任意路径.

【解】(1) $f(x) = x(\sin x - x \cos x - 1)$.

(2) $u = \frac{x^2}{2} - xy \cos x + y \sin x - y + C$

(3) $I = u(x, y)|_A^B = u(B) - u(A) = (1 - \pi) + \frac{3\pi^2}{2}$.

例16.21 计算积分: $\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right)ydx,$

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

【解】 $= \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} d\left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) = \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right)\bigg|_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} = \pi + 1$

例16.22 设 C 为正向闭曲线: $|x| + |y| = 2$, $\oint_C \frac{axdy - bydx}{|x| + |y|} = [A]$

(A) $4(a+b)$; (B) $8(a+b)$; (C) $4(a-b)$; (D) $8(a-b)$.

例16.23 计算 $\oint_{L^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L^+ 为:

(1) 任意不围绕也不通过 z 轴的闭曲线, 正方向如图, 记作 L_1^+ ;

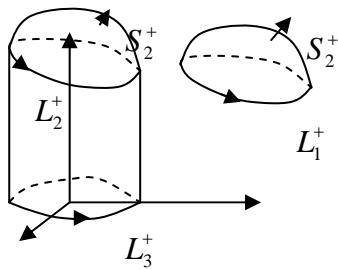
(2) 任意围绕 z 轴一周的闭曲线, 正方向如图, 记作 L_2^+ .

【解】(1) 0.

(2) 由 Stoke 公式, 答案 2π .

例16.24 在半空间 $x > 0$, 对任何光滑有向曲面 S , 有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdx dy \equiv 0$$



其中 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一阶连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 求 $f(x)$ 。 ($f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$)

4. 证明题

例16.25 设 Ω 是空间有界闭区域, S 是其外侧面, 函数 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ 在 Ω 上二阶连续可微。

证明: $\iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz$, 其中

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \text{ 为沿外法向量的方向导数。}$$

例16.26 设 $u = u(x, y, z)$ 是闭域 Ω 上的调和函数, 即满足方程:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0。$$

(1) 若 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 求 $I = \iint_{\partial \Omega} \left(u \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$,

其中, \vec{r} 是矢径, 即 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, \vec{n} 是 dS 的法线方向。

(2) 若 Ω 是任一不包含原点作为内点的闭域, 求 $I = \iint_{\partial \Omega} \left(u \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$ 。

(3) 若 Ω 是任一包含原点作为内点的闭域, 求 $I = \iint_{\partial \Omega} \left(u \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$

(4) 若 Ω 是任一包含 $P_0(a, b, c) \in \Omega^0$ 点作为内点的闭域, 求:

$$I = \iint_{\partial \Omega} \left(u \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS, \quad \text{其中, } \vec{r} \text{ 是以 } P_0 \text{ 为起点的矢径,}$$

即 $\vec{r} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, \vec{n} 是 dS 的法线方向。

例16.27 (07) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy$, 其中 Σ 为曲面

$$z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4} \quad (0 \leq z \leq 1) \text{ 的上侧。}$$

【解】 $I = \iint_{\Sigma} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy = \pi。$

第 17 讲 数项级数

(一) 级数的概念与性质

(二) 正项级数的敛散问题

(三) 任意项级数的敛散问题

(四) 综合例题

级数内容提要

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分, 是数与函数的一种重要表示形式, 也是研究函数的一种重要方法。级数问题的基础是极限理论。数项级数、幂级数、傅里叶级数是我们研究的三种基本级数。为了掌握好数项级数的有关内容, 必须理解数项级数的有关概念, 熟

刘坤林 谭泽光 章纪民 编 水木艾迪考研培训网 69 网址: www.tsinghuatutor.com 电话 62796032

熟练掌握级数运算的记号, 掌握并运用收敛级数的基本性质及常见的判别法(比较、比值、根式、莱布尼兹、绝对值), 做到正确判断正项级数、交错级数及任意项级数的敛散性。

17.1 数项级数基本概念

17.1.1 定义与符号运算

定义 17.1: 设 $\{u_n\}$ 是一个数列, 则称表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$

为一个**数项级数**, 简称级数, 其中 u_n 称为数项级数的**通项**(或**一般项**)。

$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 称为数项级数的前 n 项**部分和**。

级数的**部分和**记号 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 与级数一般项 u_n 的运算关系是

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1}, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

定义 17.2: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 极限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 称为此级数的**和**; 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在时, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**。

根据级数收敛的定义, 其和为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 。

例 17.1 几何级数(等比级数——尺度 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0, x \in \mathbb{R}).$$

【解】 当 $|x| < 1$ 时, 该级数收敛, 和为 $\frac{a}{1-x}$. 当 $|x| \geq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 该级数发散。

例 17.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 其和为 $\frac{1}{2}$ 。

例 17.3 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$ 的和为 $\frac{\pi}{4}$ 。

17.2.2 收敛级数的性质

性质 1: (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

性质 2 (充要条件):

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$) 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$.

性质 3 (运算性质):

(1) **数乘运算:** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, α 是任意实数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(2) **加法运算:** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

上述几条性质, 一定要注意它们成立的条件, 若条件不满足, 可能会得到错误结果。

例如 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$, 下述运算是错误的

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \neq 0$$

性质 4 (重组性质---更新性质)

(1) 收敛级数加括号后所生成的新级数仍收敛, 且两个级数的和相同。

注意: 此性质的逆命题并不成立, 即一个级数加括号后所形成的级数收敛并不能保证原级数收敛; 若合并级数相邻有限项后所得到的更新级数发散, 则可推断原级数发散。级数的重组性质类似于有限个数的加法所满足的结合律。

(2), 一个级数去掉、增添或改变有限项后, 生成的新级数与原级数有相同的收敛性结论。

从极限的概念来理解, 一个级数的收敛性, 只依赖于某个足够大的下标 N 之后的无穷多项和是否存在 (有极限), 与级数的前面有限项无关。

例 17.4 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于 (C)。

(A) 3; (B) 7; (C) 8; (D) 9。

例 17.5 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛性的结论是 [A]。

(A) 收敛, (B) 发散, (C) 不定, (D) 与 a_n 正负有关

17.2 正项级数

为了研究级数的判敛方法, 我们先讨论一种特殊的数项级数, 即正项级数。

定义 17.3 若 $u_n > 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。

17.2.1 正项级数基本属性

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的基本属性是: 部分和数列 $\{S_n\}$ 为单增数列。由此属性, 构成下述几个正

项级数判敛法的理论基础。

定理 17.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界。

例 17.6 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的收敛性 (尺度 2)。

$p > 1$ 时, 部分和有界, 级数收敛; 而当 $p \leq 1$ 时, 部分和无界, 级数发散。

17.2.2. 正项级数的判敛法

(1) 定理 17.3 (直接比较法) 若存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $0 \leq u_n \leq v_n$, 则

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

(2) 定理 17.4 (极限比较法 比阶法): 设 $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, 则

(1) 当 $A \neq 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同为收敛或同为发散;

(2) 当 $A = 0$ 时, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(3) 当 $A = +\infty$, 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散可推断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

推论: 设 $u_n \geq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = \rho$, 则

当 $0 \leq \rho < +\infty$, 且 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $0 < \rho \leq +\infty$, 且 $p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

发散。

例 17.7 设 $a_n > 0, p > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n) = 1$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 p 的取值范围

是 $(2, +\infty)$ 。

例 17.8 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加且有界, 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n) - \int_{n-1}^n f(x) dx]$ 收敛。

(3) 定理 17.5 (自我比较法 比率判敛法) 设 $u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$;

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断。

(4) 定理 17.6 (根值判敛法) 设 $u_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$;

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断。

与比值判敛法类似, 根值判敛法也可以与绝对值判敛法结合在一起判断任意项级数的敛散性和求幂级数的收敛半径。

(5) 定理 17.7 (积分判敛法) 设 $f(n) \geq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛的充分必要条件是存在

$N \geq 1$, 使得广义积分 $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

典型例题是: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 因为 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) \Big|_2^{+\infty}$ 发散。

例 17.9 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ 的收敛性。

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2 + (-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, 因此该级数收敛。

注: 若用比率法, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2 + (-1)^n}$ 不存在, 因为 $n = 2k$ 时上述极限为 $\frac{1}{6}$,

$n = 2k + 1$ 时上述极限为 $\frac{3}{2}$, 故不能得出收敛性结论。一般来说, 由比率法可以判断收敛性的级数, 用根值法一定可以给出同样结论, 而反之未必。

例 17.10 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 的收敛性。

解: 记 $u_n = \frac{n!}{n^n}$, 用比率法。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1, \text{ 因此该级数收敛。}$$

例 17.11 设 $u_n > 0, v_n > 0$, 且 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收

敛。

17.3 任意项级数

17.3.1 交错级数

定义 17.4: 设 $u_n > 0$, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为交错级数。对于交错级数, 有下述常用的判

敛法。

定理 17.8 (莱布尼兹判别法) 若 $u_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 满足:

- (1) 数列 $\{u_n\}$ 单减, 即 $u_n \geq u_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且 $u_n - u_{n+1} \leq R_n = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} u_k \right| \leq u_n$ 。

定理 8.7 中的两个条件也称为**莱布尼兹条件**。莱布尼兹判别法不仅给出了交错级数的收敛性结论, 而且还给出了用部分和近似级数和时的误差限, 这是一般判别法做不到的。

例 17.12 设数列 $\{a_n\}$ 非负单减, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛。

17.3.2 任意项级数

(1) 绝对收敛与条件收敛

定义 17.5: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但级数

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**。

例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 就是绝对收敛的, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 则是条件收敛。绝对收敛级数可

以重排, 即绝对收敛级数重排后所得级数的敛散性与和不变, 这类似于有限个数加法的交换率。条件收敛的级数就没有这种性质。

(2) 绝对值判别法

定理 17.9 (绝对值判别法) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

例 17.13 设 $f(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 上有定义, 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,

且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

例 17.14 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ (C)

(A) 绝对收敛; (B) 条件收敛; (C) 发散; (D) 敛散性与 a 取值有关。

例 17.15 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ 的收敛性。

答案: 根据比阶判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$ 收敛。

8.4 综合例题

例 17. 16 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 (D)。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{2n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

例 17. 17 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性。

【解】应对参数 a 分情况讨论。当 $a \neq 0$ 时, 根据比率法, 当 $|a| < e$ 时该级数绝对收敛, 而当 $|a| > e$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, 得知该级数发散。当 $|a| = e$ 时, 该级数发散。当 $a = 0$ 时, 级数显然收敛。

例 17. 18 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 [D]。

(A) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小于 1。

(B) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 小于等于 1。

(C) 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 其值小于 1。(D) 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在, 其值小于等于 1。

例 17. 19 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 且极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。

例 17. 20 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 证明对任意的常数 $\alpha > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛。

例 17. 21 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 [C]。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散。(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 发散。(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 发散。(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 发

散。

例 17. 22 设 $u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, 则级数 []

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛

答案: (C)。 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 属于条件收敛的莱布尼兹级数。

例 17. 23 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{b}{\sqrt{n}}\right)^2$ ($b \neq 0$, 常数) 为 []。答案(B)

(A) 条件收敛。 (B) 绝对收敛。

(C) 收敛性与 b 的取值有关。 (D) 发散。

例 17. 24 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{b}{n}\right) + \frac{(-1)^n}{n} \right]$ ($b > 0$, 常数) 为 []。答案(D)。

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛

(C) 收敛性与 b 的取值有关 (D) 发散

例 17. 25 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ []。答案(A)。

(A) 绝对收敛。 (B) 条件收敛。 (C) 收敛性与 b 的取值有关。 (D) 发散。

第 18 讲 函数项级数

(一) 函数项级数的收敛域

(二) 幂级数和函数的幂级数展开

(三) 周期函数的三角级数展开

(四) 综合例题

18. 1 函数项级数的收敛域

公项是函数的级数称为函数项级数, 它是否也表示一个函数的有关概念, 首先是借助于数项级数的收敛性概念给出的。

定义 18.1 称表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots$ 为定义在 D 上的函数项级数,

$u_n(x)$ 称为级数的通项, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 称为级数的部分和函数。

定义 18.2 收敛点与收敛域。

定义 18.3 和函数。

利用收敛域的定义及数项级数的有关判敛法可以求某些简单函数项级数的收敛域。

关于函数项级数收敛域的确定, 一般是基于数项级数判敛方法得到收敛点的集合。

刘坤林 谭泽光 章纪民 编 水木艾迪考研培训网 77 网址: www.tsinghuatutor.com 电话 62796032

例如, 讨论下列级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}: D = (-\infty, +\infty)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx): D = \{x \in \mathbb{R} | x = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots\}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{200}} x^n: D = \{0\}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n! e^{nx}: D = \emptyset$$

18.2 幂级数的概念

18.2.1 幂级数的定义与收敛域

定义 18.4 设 $\{a_n\} (n=0, 1, 2, 3, \dots)$ 是一实数列, 则称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的函数项级数为

x_0 处的**幂级数**。 $x_0 = 0$ 时的幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 。

1. 幂级数的收敛域 幂级数作为一种特殊的函数项级数, 其收敛域也具有某些特定的性质。这主要体现在以下的定理和其推论中。

定理 18.1 (阿贝尔定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛, 则其在 $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛。

【证】 设 $|x| < |x_0|$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$, 即存在 N 与 $M > 0$

使 $n > N$ 时 $|a_n x_0^n| < M$ 。考虑 $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$, 由于 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$,

则 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 绝对收敛, 于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛。

推论 1: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_1 处发散, 则其在 $|x| > |x_1|$ 时发散。

推论 2: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛, 在 x_1 处发散, 则存在惟一的实数 $R > 0$, 使得

当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散。

为了进一步刻画幂级数的收敛域, 引进以下概念。

定义 18.5 若 $R \geq 0$ 满足:

- (1) 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; (2) 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散,

则称 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 开区间 $(-R, R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间。

注: (1) 在 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 既有非零收敛点, 又有发散点时, 它的收敛半径是存在惟一的。

- (2) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有非零收敛点时, 其收敛半径记为零; 当 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有发散点时,

其收敛半径记为 $+\infty$ 。这样对任意一个幂级数来说, 其收敛半径都是存在惟一的。

- (3) 由幂级数收敛特点可知, 使得幂级数条件收敛的点只能是其收敛区间的端点。

幂级数收敛域的基本特点是:

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛域是非空点集, 即至少在 x_0 处收敛。

- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的收敛域是 x_0 为对称点的一个对称区间 (收敛区间),

即 $(x_0 - r, x_0 + r)$, r 为收敛半径; 区间端点情况较复杂, 视具体级数而定。

2. 收敛半径的计算

定理 18.2 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n \neq 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则其收敛半径为

$$R = \frac{1}{\rho}.$$

定理 18.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则其收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 。

注: (1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 存在 (或是无穷大) 仅仅是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半

径为 $R = \frac{1}{\rho}$ 的一个充分条件。反过来, 仅由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 并不能保证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R} \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \text{ 成立。}$$

(2) 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $a_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \rho |x|$,

所以, 当 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x^n| = +\infty$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

发散。因此收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$ 。特别地, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ 时, $R = +\infty$; 而当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$

时, $R = 0$ 。

(3) 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, 若 $a_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}} \right| = \rho x^2$,

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 绝对收敛; 当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 发散。因此, 收敛半径

$R = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 。同样, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ 时, $R = +\infty$; 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ 时, $R = 0$ 。

例 18.1 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} x^n$ 的收敛半径。

【解】 由于 $\frac{1}{2^n} |x|^n \leq \frac{2+(-1)^n}{2^n} |x|^n \leq \frac{3}{2^n} |x|^n$, 且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} x^n$ 的收敛半

径都是 2, 根据比较判别法得到 $R = 2$, 或用根值法, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2}$, 因此 $R = 2$ 。

但比率法对本题失效。

例 18.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [A]。

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 不定。

例 18.3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{19^n} x^{2n-1}$ 的收敛域。收敛域为 $(-3, 3)$ 。

例 18.4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x-1)^{2n-1}$ 的收敛域。收敛域为 $(0, 1)$ 。

例 18.5 设 a_0, a_1, a_2, \dots 为一等差数列, 且 $a_0 \neq 0$, 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域。

答案: 收敛域为 $(-1, 1)$ 。

例 18.6 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$ 的收敛域为 $\underline{(-\sqrt{3}, \sqrt{3})}$ 。

9. 2. 3 幂级数的性质

在收敛区间内, 除了具有收敛级数和绝对收敛级数的基本性质外, 幂级数作为特殊的函数项级数还具有下面几条常用的性质。

1. 两级数和的收敛半径: 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2 ,

一般情况下, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$,

且 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $x \in (-R, R)$ 。

2. 和函数的连续性: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续,

即任给 $x_0 \in I$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = S(x_0)$ 。

3. 和函数的可积性与逐项积分性质

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 且可逐项积分, 即任给 $x \in I$, 有

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}。$$

若记 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R_1 , 则 $R \leq R_1$ 。且逐项积分后的幂级数收敛域不会变小。

4. 和函数的可导性与逐项求导公式: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$

内可导, 且可逐项求导, 即任给 $x \in (-R, R)$, 有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}。$$

注: (1) 记 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 的收敛半径为 R_2 , 则 $R \leq R_2$ 。但应注意的是, 即使级数在收敛区

间的端点收敛, 性质 4 也不保证和函数在此端点可导。例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} x^n$ 在 $x=1$ 处收敛,

但其逐项求导后的级数在 $x=1$ 并不收敛。

(2) 由性质 3 与性质 4 易知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 的收敛

半径相等, 即 $R = R_1 = R_2$ 。

18. 2. 4 函数展开成幂级数

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, $x_0 \in D$, 若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 对任意的

$x \in D$ 都成立, 则称 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数。

由幂级数的性质易知, 若 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数, 则 $f(x)$ 在区间 D 内存在任意阶导数。根据逐项求导性质, 可以证明以下定理。

定理 18.4 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$,

则其展开系数为 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n=0,1,2,\dots)$ 。

这说明, 若函数能展开成某点的幂级数, 则其展开形式是惟一的。展开形式的惟一性是利用间接展开法将函数展开成幂级数的主要理论依据。

1. 泰勒级数与麦克劳林级数

定义 18.6 若 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0) (n=1,2,3,\dots)$ 都存在,

则称幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒 (Taylor) 级数,

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n=0,1,2,\dots)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒系数。特别地, $x_0=0$ 处的泰勒级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林 (Maclaurin) 级数。

充分必要条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x),$$

则 $f(x)$ 在 D 上能展开成 x_0 处的泰勒级数的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, x \in D$ 。

充分条件: 当 $f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)$ ($n=1,2,3,\cdots$) 在 D 上一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|f^{(n)}(x)| \leq M$ ($n=1,2,3,\cdots, x \in D$) 成立时, 函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in D$ 处的泰勒级数在 D 上收敛到 $f(x)$ 。

2. 函数展开成幂级数的方法

(1) 直接展开法

由直接展开法易知函数 $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数展开式为:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,$$

其中, 当 $\alpha \leq -1$ 时, $x \in (-1, 1)$; 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, $x \in (-1, 1]$; 当 $\alpha > 0$ 时, $x \in [-1, 1]$ 。

特别地, 当 $\alpha = -1$ 时, 有 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$ 。

(2) 间接展开法

间接展开法指的是: 通过一定运算将函数转化为其他函数, 进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法。所用的运算主要是加法运算, 数乘运算, (逐项) 积分运算和 (逐项) 求导运算。利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式,

上述几个简单函数就是常用的几个。间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法。

例 18.7 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数, 并求收敛区间。

【解】 $= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}$, 收敛区间为 $(-1, 3)$ 。

例 18.8 函数 $f(x) = xe^x$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为_____。

【解】 答案 $= e \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) (x-1)^n \right]$ 。

例 18.9 将 $f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ 展开为 x 的幂级数。 $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

3. 简单幂级数的和函数及简单数项级数求和

求幂级数的和函数问题, 是将函数展开成幂级数问题的反问题。下面通过几个具体例子来说明此类问题的求解方法。

例 18.10 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和。 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = S(1) = 2e$ 。

例 18.11 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$ 。

【解】 $S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}, & |x| \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

18.3 傅里叶级数

傅里叶级数是刻画周期信号的常用工具。只有理解傅里叶级数的概念, 掌握狄里克雷收敛定理, 才能写出函数的傅里叶系数、傅里叶级数及其函数等。

18.3.1 周期为 2π 的傅里叶级数

1. 有关概念

(1) 三角函数系 $\{1, \cos nt, \sin nt | n = 1, 2, \dots\}$ 是 $[-\pi, \pi]$ 上的正交性: 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$$

(2) 周期函数的傅里叶级数

定义 18.7 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则称

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**; 称级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的**傅里叶级数**。记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)。$$

当 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积奇函数时有

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

此时 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数为 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 称为**正弦级数**。

而当 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积偶函数时, $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶

级数为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, 称为**余弦级数**, 且

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)。$$

根据周期函数的性质, 傅里叶系数可在任何一个周期长度的区间上积分得到, 即

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx dx。$$

2. 傅里叶级数的收敛性

定理 18.5 (狄里克雷收敛定理) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数, 且满足

- (1) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点,
- (2) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上只有有限个单调区间,

则 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛, 且

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))。$$

也就是说, 在 $f(x)$ 的连续点处, 和函数 $S(x)$ 与函数 $f(x)$ 的值相等; 在 $f(x)$ 的第一类间断点处, $S(x)$ 的值等于 $f(x)$ 在此点的左、右极限的平均值。

18.3.2 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

与周期为 2π 的函数类似, 当函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数, 且在 $[-l, l]$ 上可积时, 称

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0,1,2,\cdots), \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶系数; 称级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

为 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期的傅里叶级数。记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)。$$

周期为 $2l$ 的傅里叶级数的收敛性结论与周期为 2π 的傅里叶级数有类似结论。

18.3.3 只在 $[0, l]$ 上有定义的函数的傅里叶级数展开

定义在 $[0, l]$ 上的函数可以有多种方式展开成 $2l$ 三角级数, 但常用的方式只有三种, 即:

周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓。三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为:

$$1. \text{ 正弦级数展开 } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad (\text{周期为 } 2l)。$$

$$\text{其中 } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

$$2. \text{ 余弦级数展开 } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in [0, l], \quad (\text{周期为 } 2l)。$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0,1,2,\cdots)。$$

例 18.12-1 已知 $f(x) = x+1, x \in [0, 1], S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的三角级数的和函数, 则

$$S(0), S\left(\frac{1}{2}\right) \text{ 的值分别为 } \underline{\frac{3}{2}}, \underline{\frac{3}{2}}。$$

例 18.12-2 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 则 $a_2 = \underline{\quad}$ 。

例 18.13 设函数 $f(x) = x^2, x \in [0,1]$, 而 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, x \in (-\infty, +\infty)$,

其中 $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx, n = 0, 1, 2, \dots$,

则 $S(-1)$ 的值为 [D]。

(A) -1。 (B) $-\frac{1}{2}$ 。 (C) $\frac{1}{2}$ 。 (D) 1。

18.4 综合例题

例 18.14 下列命题中正确的是 [D]。

(A) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$ 。

(B) 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不存在, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有收敛半径。

(C) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$ 。

(D) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$ 。

例 18.15 已知 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-\infty, +\infty)$, 且对任意 $x, F'(x) = f(x)$, 则 $F(x)$ 麦克

劳林展开式为 $F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, x \in (-\infty, +\infty)$ 。

例 18.16 设 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$, 则 $f^{(101)}(0) = \underline{-101!}$ 。

注: 利用泰勒级数展开是求高阶导数的一种有效方法。因为在泰勒级数展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

中含有 $f^{(n)}(x_0)$, 所以, 当 $f(x)$ 的泰勒展开式能利用一些已知函数的展开式得到时, 则由

展开形式的惟一性可方便地求出 $f^{(n)}(x_0)$ 。 $f^{(101)}(0) = -101!$ 。

例 18.17 将函数 $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ 展开为 $x=0$ 处的幂级数。

【解】 $= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leq x < 1)。$

例 19.18 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$ 在 $x_0=1$ 点展成幂级数, 并求 $f^{(n)}(1)$ 。

答案: $f(x) = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} [1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}](x-1)^n, x \in (0,2), f^{(n)}(1) = -\frac{n!}{5} [1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}]。$

例 18.19 设 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$, 又 $g(x) = \frac{xf(x)}{1+x}$, 求 $g(x)$

的 Maclaurin 级数。答案: $g(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n+1}, |x| < 1$

例 18.20 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

【解】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}。$

例 18.21 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 证明:

$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}。$

例 18.22 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展成周期 $T=2$ 的正弦级数, 则

$S(-\frac{5}{2})$ 为 (C)。

(A) 0; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $-\frac{1}{4}$; (D) 1.

例 18.23 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$, 写出 $f(x)$ 的傅里叶

级数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和。

答案: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}。$