知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

基础班微积分辅导第 10 讲

常微分方程（二）—— 高阶线性方程

10.1 高阶线性方程及其解的结构

10.1.1 高阶线性方程及其特点

● n阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+\dots+a_n(t)x=f(t)$$

其中$a_i(t)(i=1,2,\dots,n)$以及$f(t)$都是区间I上的已知连续函数.

当$f(t)\equiv 0$时, 上述方程称为齐次方程:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+\dots+a_n(t)x=0$$

● 对于n阶线性微分方程解的存在唯一性定理:

定理 10.1：设方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+\dots+a_n(t)x=f(t)$$

中的系数$a_i(t)(i=1,2,\dots,n)$以及非齐次项$f(t)$都是区间I上的已知连续函数，$t_0\in I$，则对于任意一组实数$\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}$，方程满初值条件： $x(t_0)=\xi_0, x'(t_0)=\xi_1,\dots,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1}$

的解在区间I上存在唯一.

例10.1 判断下列方程中哪些是线性方程,

（i） $y''+xy'+2y=\sin x$ ；（ii） $y''+xy'+2y=\sin y$

（iii） $y''+x^2y'=|1-x|y$ ；（iv） $y''+x^2y'=|1-x|\sqrt{y}$

10.1.2 线性方程解的结构

(1) 函数的线性相关性：

定义 10.1： 在区间(a,b)上的n个函数$x_i(t), i=1,\cdots,n$线性相关，是指存在n个不全为零的常数$c_i, i=1,\cdots,n$，使得$\forall x\in(a,b), \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)=0$；否则称$x_i(t), i=1,\cdots,n$为线性无关.

例如：设$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in R$互不相等， 则函数$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\dots,e^{\lambda_m t}$在任意区间$I$上线性无关.

(2) 线性方程解的结构

定理 10.2 若$x_1(t),x_2(t)$都是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$$

的解，则对任意常数c_1, c_2，函数$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是该方程的解.

证明：只要利用微分方程的线性性即可。

定理 10.3 方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$的所有解构成一个$n$维线性空间，其中任意$n$个线性无关的解，$x_i(t), i=1,\cdots,n$，构成该空间的一组基。

定理 10.4　非齐次方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=f(t)$

任意两个解之差是齐次方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$

的解；因此，如果已知方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=f(t)$有一个特解$X(t)$，那么它的每个解都可以表示为 $x(t)=X(t)+\bar{x}(t)$，其中$\bar{x}(t)$是齐次方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$的一般解.

例10.2　$p(x), q(x)$和$f(x)$是连续函数，且线性无关的三个函数y_1, y_2, y_3都是二阶线性非齐次方程之解，c_1和c_2是任意常数，则其通解是：（D）

(A) $c_1y_1+c_2y_2+y_3$；　　(B) $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$；

(C) $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$；　(D) $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

- **非齐次线性常微分方程两个解的差为齐次线性常微分方程的解**
- **非齐次方程的通解＝齐次方程的通解加非齐次方程的特解**

例10.3　（01）设$y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$，（$c_i, i=1,2$为任意常数），为某二阶常系数齐次微分方程的通解，则该方程为（　$y''-2y'+2y=0$　）

【解】，特征根为$\lambda=1\pm i$，特征方程为$\lambda=(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)=(\lambda-1)^2+1$

因此该方程为　$y''-2y'+2y=0$　。**或**：将两个解$y_1=e^x\sin x$，　$y_2=e^x\cos x$代入方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$后，求$p(x), q(x)$；

例10.4　求方程　$x''+\omega^2x=a$　之通解。

【解】与相应的齐次方程　$x''+\omega^2x=0$，

不难验证, $\sin\omega t, \cos\omega t$ 是齐次方程 的两个线性无关解; $\frac{a}{\omega^2}$ 是非齐次方程的一个特解. 因此，齐次方程的通解是 $x(t) = c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t$.

而非齐次方程的通解为 $y(t) = \frac{a}{\omega^2} + c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t$.

(3) 线性方程求解的基本方法：观察待定法。

设有二阶齐次方程: $L(D)y = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$,

- 若已知二阶齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个特解 $y_1(x)$，用**变动任意常数法,**

设 $y_2(x) = c(x)y_1(x)$，代入方程 可求出 $c(x)$，进而得到另一个无关特解。

- 若已知二阶齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的二个无关特解， $y_1(x), y_2(x)$，用**变动任意常数法**，设 $Y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$，代入方程，可求出非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的一个特解。

例10.5　$xy'' + xy' - y = 0$

【解】先观察有解， $y_1(x) = x$，再用变动任意常数法，设 $y_2(x) = xC(x)$ 代入方程求出解，

$y_2 = x(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$;所以一般解是: $y = c_1 x + c_2 x(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$

例10.6　解方程 $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

【解】1：**变动任意常数法.** 先看出有： $y_1 = x$;

再令 $y_2 = C(x)y_1$，代入方程 $\Rightarrow \frac{C''}{C'} = \frac{2}{x(x^2 - 1)} = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2}{x}$

$\Rightarrow C = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y_2 = Cy_1 = x^2 + 1$. 从而齐次一般的为： $y = c_1 x + c_2(1 + x^2)$

【解】2：**观察待定法**：观察可能有多项式的解，为此设

多项式解： $y = x^n$， $n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow n = 1,2 \Rightarrow$ 有解 $y_1 = x$; $y_2 = x^2 + 1$，

从而齐次一般的为： $y = c_1 x + c_2(1 + x^2)$

例10.7　解方程 $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 1 - x^2$,

【解】**变动任意常数法**：令 $Y = y_1(x)C_1(x)y + y_2(x)C_2(x)$，代入方程得

$$C_1' = -\frac{x^2+1}{x^2-1},\ C_2' = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow Y = \frac{x}{2}\ln(1-x^2) + (x^2+1)\left[\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{x^2}{2}\right].$$

10.2 高阶线性常系数齐次方程的解

考察n阶线性常系数齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + \ldots + a_n x = 0$$

其中$a_1,\ldots,a_n$为实常数. 或记成 $L(D)x = 0$

- 由上一段的讨论知道, 方程$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + \ldots + a_n x = 0$在区间$(-\infty,+\infty)$有$n$个线性无关解, 通解是这些解的线性组合。

10.2.1 特征方程：

(1) 若 $L(D)x = 0$ 有形如 $y = e^{\lambda t}$ 的解，则 λ 必须是代数方程

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

之根。称为微分方程 $L(D)x = 0$ 的**特征方程**. 特征方程的根称为**特征根**.

(2) **特征根与方程 $L(D)x = 0$ 解的对应关系.**

先以二阶为例说明结果： 微分方程： $L_2(D)x = y'' + ay' + by = 0$

特征方程： $L_2(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$

1) λ_1, λ_2 是特征方程 $L_2(\lambda) = 0$ 的不等实根， 则 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ 是方程 $L_2(D)x = 0$ 的两个无关解.

2) $\lambda_1 = \lambda_2$ 是特征方程 $L_2(\lambda) = 0$ 的重根； 则 $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}$ 是方程 $L_2(D)x = 0$ 的两个无关解.

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta$ 是特征方程 $L_2(\lambda) = 0$ 的一对共轭复根, 则 $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ 是方程 $L_2(D)x = 0$ 的两个无关解.

其中用到结果：

- 设$z(t) = u(t) + iv(t)$ ， 定义它的导数为 $\frac{dz}{dt} = \frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt}$.

如果复值函数 $z(t) = u(t) + iv(t)$是齐次方程 $L(D)x = 0$ 的解， 则实部$u(t)$和虚部$v(t)$都

是 $L(D)x=0$ 的实解.

- 欧拉公式：$e^{\lambda t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$

10.2.2 n 阶方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+....+a_n x=0$ $(*)$ 特征特征根与解的对应：

1）设 λ 是特征方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 的实根，则 $e^{\lambda t}$ 是方程 $(*)$ 的实解.

2）设 $\alpha\pm i\beta$ 是特征方程的一对单重复根，则 $e^{\alpha}\cos\beta t, e^{\alpha}\sin\beta t$ 是方程 $(*)$ 的两个无关实解.

3）设 λ 是特征方程的 $k(1<k\le n)$ 重实根，则 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t},\cdots,t^{n-1}e^{\lambda t}$ 是方程 $(*)$ 的 k 个无关实解.

4）设 $\alpha\pm i\beta$ 是特征方程的一对 $k(1<2k\le n)$ 重复根，则

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots,t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

是方程 $(*)$ 的 $2k$ 个无关实解.

由此可知：对应特征方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 的 n 个根，包括重根，均能得到方程 $(*)$ 的 n 个线性无关解.

例10.8　具有特解 $e^{-x}, 2xe^{-x}, 3e^{x}$ 的三阶线性常系数齐次方程是：（ B ）

（A）　$y'''-y''-y'+y=0$；　　（B）　$y'''+y''-y'-y=0$

（C）　$y'''-6y''+11y'-6y=0$；　　（D）　$y'''-2y''-y'+2y=0$

【解】特征方程为 $(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$.

例10.9　$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^{x}$ 有一特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$，求 α,β,γ 及通解。

征值为 2,1，特征方程 $(\lambda-1)(\lambda-2)=0$，$\alpha=-3$，$\beta=2$，$\gamma=-1$。

例10.10 设 μ 为实数，求方程 $x''+\mu x=0$ 的通解.

【解】特征方程为 $\lambda^2+\mu=0$.

1）. $\mu>0$，此时特征方程有一对单重复根 $\lambda=\pm i\sqrt{\mu}$，方程有两个无关解

$$\cos\sqrt{\mu}\,t, \sin\sqrt{\mu}\,t.$$

因此方程的通解为　$c_1\cos\sqrt{\mu}t+c_2\sin\sqrt{\mu}t(c_1,c_2\in R)$.

知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

2. $\mu=0$，此时特征方程有一个二重根 $\lambda=0$. 方程有两个线性无关解 $\varphi_1(t)=1, \varphi_2(t)=t$，于是方程为 $x(t)=c_1+c_2t$.

3. $\mu<0$, 时特征方程有两个单重根 $\lambda=\pm\sqrt{-\mu}$. 方程有两个线性无关解 $e^{\sqrt{-\mu}t}, e^{-\sqrt{-\mu}t}$，且方程通解为 $x(t)=c_1e^{\sqrt{-\mu}\,t}c_2e^{-\sqrt{-\mu}\,t}$.

例10. 11 求方程 $x^{(4)}-x=0$ 的通解.

【解】特征方程为 $\lambda^4-1=0$. 它有四个单根 $\lambda_{1,2}=\pm1, \lambda_{3,4}=\pm i$.

该方程有四个线性无关解 $e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t$.

因此方程通解为 $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$.

例10. 12 求方程 $x'''-3x''+3x-x=0$ 通解.

【解】特征方程 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ 有一个三重根 $\lambda=1$.

于是方程有三个线性无关解 e^t, te^t, t^2e^t ，

所以通解为 $x(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t=\left(c_1+c_2t+c_3t^2\right)e^t$.

例10. 13 求方程 $x^{(4)}+2x''+x=0$ 通解.

【解】特征方程 $\lambda^4+2\lambda^2+1=(\lambda^2+1)^2=0$. 它有一对二重复根 $\pm i$.

于是该方程有四个线性无关解 $\cos t, \sin t, t\cos t, t\sin t$.

所以通解为 $x(t)=(c_1+c_3t)\cos t+(c_2+c_4t)\sin t$.

10. 3 高阶线性常系数非齐次方程的解

10. 3. 1 线性常系数非齐次方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+....+a_nx=f(t)$$

其中 $a_1,\ldots,a_n$ 为实常数， $f(t)$ 是已知连续函数. 方程可记成： $L_n(D)x=f(t)$.

若相应的齐次方程 $L_n(D)x=0$ 的一般解是： $\bar{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$，因此, 如果又能够求得 $L_n(D)x=f(t)$ 的一个特解 $Y(t)$，就能够写出其通解：

$$x(t)=\bar{x}(t)+Y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t)+Y(t)$$

一般情况下可以用常数变异法根据 $L_n(D)x=0$ 的通解求出 $L_n(D)x=f(t)$ 的一个特解.

10. 3. 2 $L_n(D)x=P(t)e^{\alpha t}$ 型方程的求解

对于 右端函数 $f(t)$ 属于某些简单类型时, 可以用观察待定方法求非齐次的一个特解. 下面我们以二阶方程为例说明这种方法. 对于高阶方程也可以类似地求解.

考察二解线性常系数方程　$L_2(D)x=\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=f(t)$

假定右端函数具有形式　$f(t)=P(t)e^{\alpha t}$，其中 $P(t)$ 是 t 的一个多项式.

比较系数法的出发点是假定方程 $L_2(D)x=P(t)e^{\alpha t}$ 有一个形如　$x(t)=Q(t)e^{\alpha t}$ 的解，其中 $Q(t)$ 是 t 的一个多项式．问题是如何确定 $Q(t)$ 的次数和系数.

根据解的概念 ，将 $x(t)=Q(t)e^{\alpha t}$ 代入方程 $L_2(D)x=P(t)e^{\alpha t}$，得

$$Q''(t)+(2\alpha+a)Q'(t)+(\alpha^2+a\alpha+b)Q(t)=P(t)\qquad (*)$$

下面分三种情形讨论.

(1) 当 α 不是特征根时，　即 $\alpha^2+a\alpha+b\neq 0$ (*) 左端是 一个次数与 $Q(t)$ 相同的多项式. 为了使(*)两端多项式次数相等，$Q(t)$ 应当是一个与 $P(t)$ 次数相同的多项式.

(2) ．当 α 是特征根，但非重根时，　即 $\alpha^2+a\alpha+b=0$ ，$2\alpha+a\neq 0$，(*) 左端是 一个次数与 $Q'(t)$ 相同的多项式．于是为了使(*) 两端多项式次数相等，$Q(t)$ 应当是一个比 $P(t)$ 次数高一次的多项式．此时可以取　$Q(t)=tR(t)$，这里 $R(t)$ 是一个次数与 $P(t)$ 相同的多项式.

(3)．当 α 是特征堇根时，　即 $\alpha^2+a\alpha+b=0$ ，$2\alpha+a=0$，(*) 左端是 $Q''(t)$. 于是为了使(*) 两端多项式次数相等，$Q(t)$ 应当是一个比 $P(t)$ 次数高二次的多项式.

此时可以取 $Q(t)=t^2R(t)$.

例10.14 方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(a,b 为常数)是 (B)

(A) ae^x+b；　(B) axe^x+b；　(C) ae^x+bx；　(D) axe^x+bx.

【解】 $y_1''-y_1=e^x$，解应具有形式 $a\,xe^x$

$y_2''-y_2=1$，解应具有形式 b

例10. 15 求方程 $x''+x'=2t^2+1$ 的通解.

【解】 将方程写作 $x''+x'=(2t+1)e^{0t}$. 因为 $\lambda=0$ 是特征方程 $\lambda^2+\lambda=0$ 的单根, 所以应当寻找方程形如 $x_0(t)=t(at^2+bt+c)e^{0t}=at^3+bt^2+ct$ 的特解. 将这个解代入原方程得到 $3at^2+(2b+6a)t+(c+2b)=2t^2-3$

比较两端同次项的系数得到 $3a=2,2b+6a=0,c+2b=-3$.

解这个方程组得到 $a=\dfrac{2}{3},b=-2,c=1$. 从而得到原方程的一个特解

$$x_0(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+t.$$

又求得相应的齐次方程 $x''+x'=0$ 的通解 $x(t)=c_1+c_2e^{-t}$. 所以方程通解为

$$x(t)=c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^3-2t^2+t.$$

例10. 16 解方程 $x''-2x'+x=4te^t$.

【解】 $\lambda=1$ 是特征方程 $\lambda^2-2\lambda+\lambda=0$ 的重根, 设特解为 $x(t)=t^2(at+b)e^t$

将这个解代入方程得到 $(6at+2b)e^t=4te^t$. 比较系数得到 $a=\dfrac{2}{3},b=0$.

于是得到方程的一个特解 $Y(t)=\dfrac{2}{3}t^3e^t$. 相应地齐次方程的通解是 $x(t)=(c_1+c_2t)e^t$.

因此原方程的通解为 $x(t)=(c_1+c_2t)e^t+\dfrac{2}{3}t^3e^t$.

例10. 17 解方程 $x''-x=4\cos t$,

【解 1】考虑方程 $z''-z=4e^{it}=4(\cos t+i\sin t)$，其中 $z(t)=x(t)+iy(t)$。

这个方程的解是复值函数, 其实部就是题设方程的解. 由于虚数 i 不是特征方程 $\lambda^2-\lambda=0$ 的根, 所以对于此方程 应当寻求形如

$$z_0(t)=(A+iB)e^{it}$$

的特解(A,B 为实常数). 将这个解代入方程, 比较系数得到 $-2(A+iB)e^{it}=4e^{it}$.

由此得到 $A=2,B=0$, 于是求出一个特解为 $z_0(t)=-2e^{it}$. 它的实部

$x_0(t)=\mathrm{Re}\,z_0(t)=-2\cos t$，就是题设的一个特解.

另外又求得相应的齐次方程 $x''-x=0$ 的通解，$x=c_1e^t+c_2e^{-t}$，因此所求之的通解为

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}-2\cos t.$$

【解 2】 形如 $x''+ax'+bx=P(t)e^{\alpha t}(d_1\cos\beta t+d_2\sin\beta t)$（其中 $P(t)$ 为多项式，d_1,d_2 为常数.）的方程，可以直接用比较系数法求解。

例10.18 求方程 $x''+\omega x=H\sin\beta t$，其中 H,ω,β 为常数.

【解】此方程对应的齐次方程 $x''+\omega^2x=0$ 的通解为 $x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$.

1. $x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\dfrac{H}{\omega^2+\beta^2}\sin\beta t$.

2. 若 $\beta=\omega$，则 $i\beta$ 是特征根，并且是单重根，此时 ，从而方程通解是

$$x(t)=(c_1-\frac{H}{2\omega}t)\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

例10.19 求方程 $x''-x=t^2+1+te^{2t}$ 的一个特解.

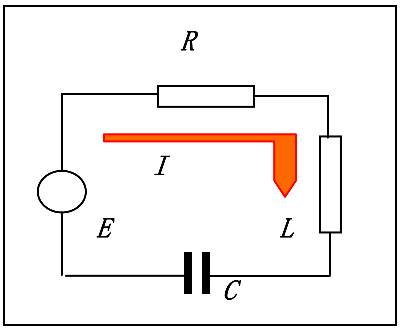
【解】考察以下两个方程：$x''-x=t^2+1$，　$x''-x=te^{2t}$. 用比较系数法分别求出这两个方程的特解：　$y_1=-t^2-2$，　$y_2=(\frac{t}{3}-\frac{4}{9})e^{2t}$.

于是这两个解之和就是原方程的一个解：$y=y_1+y_2=:-t^2-2+(\frac{t}{3}-\frac{4}{9})e^{2t}$.

例10.20（电路问题） $IR+L\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I\,dt=E$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dE}{dt}$$

$$LC\frac{d^2I}{dt^2}+RC\frac{dI}{dt}+I=C\frac{dE}{dt}$$



这就是所谓的 R-L-C 电路方程.

10.4 Euler 方程

形如　$t^n\dfrac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}t\dfrac{dx}{dt}+a_nx=0$

的方程称为 Euler(欧拉)方程. 其中 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 为常数. 对于这种方程，应当分别考虑 $t>0$ 和 $t<0$ 的情形. 作代换 $s=\ln|t|$ 可以将上述方程化为未知函数 $x=x(s)$ 的常系数方程.

知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

例10.21 解方程$t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+2t\dfrac{dx}{dt}+2x=0$.

【解】令$s=\ln|t|$, 则$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{1}{t^2}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{t^2}\dfrac{d^2x}{ds^2}$.

代入原方程即可以将其化为 $\dfrac{d^2x}{ds^2}+\dfrac{dx}{ds}+2x=0$.

于是方程通解为$x(s)=e^{-\frac{s}{2}}(c_1\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}s+c_2\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}s)$即

$$x(t)=|t|^{\frac{1}{2}}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|t|+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|t|).$$

10.5 差分方程介绍

（一）线性常系数差分方程　设未知数列 y_n ,$n=0.1,2,\cdots$, 　则

（1）　$a_ny_{n+1}+b_ny_n=f_n$，若 $f_n\neq 0$，称为一阶线性非齐次差分方程；

$a_ny_{n+1}+b_ny_n=0$，称为一阶线性齐次差分方程，

若$a_n=a, b_n=b$为常数，则称为常系数满足方程.

（2）　$a_ny_{n+2}+b_ny_{n+1}+c_n=f_n$，若 $f_n\neq 0$，称为二阶线性非齐次差分方程；

$a_ny_{n+2}+b_ny_{n+1}+c_n=0$，称为二阶线性齐次差分方程，

若$a_n=a, b_n=b, c_n=c$为常数，则称为常系数满足方程.

差分方程初始值问题： $\begin{cases}a_ny_{n+1}+b_ny_n=f_n\\ y_0=\alpha\end{cases}$，$\begin{cases}a_ny_{n+2}+b_ny_{n+1}+c_n=f_n\\ y_0=\alpha,\ y_1=\beta\end{cases}$.

（3）差分方程的**解**：**使差分方程成为关于 n 的恒等式的数列** y_n ,$n=0.1,2,\cdots$称为相应差分方程之**解**。与微分方程类似，也有通解特解之说。

特别是对线性差分之程，有完全类似于线性微分方程解的结构理论。

（二）一、二阶线性常系数齐次差分方程的解法

（1）一阶方程：$\begin{cases}y_{n+1}-py_n=0\\ y_0=y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_{n+1}=py_n\\ y_0=y_0\end{cases}\Rightarrow y_n=p^ny_0$.

（2）二阶方程：$\begin{cases}y_{n+2}+py_{n+1}+q=0\\ y_0=y_0, y_1=y_1\end{cases}$. 令$y_k=\lambda^k$，代入方程，得特征方程：

$\lambda^2+p\lambda+q=0$，设有二根λ_1,λ_2，则一般解：$y_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$.

例10. 22　解差分方程$\begin{cases}2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0\\ x_0=1/2\,,x_1=13/20\end{cases}$.

【解】特征方程，$2\lambda^2-3\lambda+1=0\Rightarrow\lambda_1=1/2\,,\lambda_2=1$ ，则一般解：$y_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2$，

由初始条件确定常数，得特解：$y_n=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

10. 6 综合例题

例10. 23 求定解问题 $\begin{cases}y''+4y'+4y=\cos 2x\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$ 的解。

【解】 齐次方程的通解：$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-2x}$ ，

设非齐次方程的一个特解：$y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$

求导并代入原方程　$8b\cos 2x-8a\sin 2x=\cos 2x$

比较系数　$b=\frac{1}{8}$，$a=0$，所以 $y^*=\frac{1}{8}\sin 2x$

非齐次方程的通解　$Y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x$

把初始条件 $y(0)=0$ 代入 Y 中，得 $C_1=0$，

把初始条件 $y'(0)=0$ 代入 Y' 中，得 $C_2=-\frac{1}{4}$，

于是　$Y=-\frac{x}{4}e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x$。

例10. 24 振荡问题讨论，质量为 m 的质点挂在在弹簧上，弹性力与位移成正比，比例系数为 $k>0$； 力阻力与速度成正比，比例系数为 $\mu\ge 0$；所受外力为 $f(t)$，则运动满足微分方程及条件，

$$\begin{cases}m\,x''=-c\,x'-k\,x+f(t)\\ x(0)=x_0,\ x'(0)=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x''+\frac{c}{m}x'+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f(t)\\ x(0)=x_0,\ x'(0)=v\end{cases}.$$

研究运动规律。

【解】为方便计，设 $\mu=\frac{c}{2m}$，$\omega^2=\frac{k}{m}$，$F(t)=\frac{1}{m}f(t)$，则有

$$\text{原方程}\Rightarrow\begin{cases}x''+2\mu\,x'+\omega^2\,x=F(t)\\ x(0)=x_0,\ x'(0)=v\end{cases}\quad(*)$$

特征方程：$\lambda^2+2\mu\lambda+\omega^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega^2}$. $\sqrt{|\mu^2-\omega^2|}=q$

（1） $\mu\ge\omega$, $\lambda_1=-\mu+q\le 0,\ \lambda_2=-\mu-q<0$

（2） $\mu<\omega$, $\lambda_1=-\mu\pm q\,i$.

例10.25 设 $y_1=3+x^2,\ y_2=3+x^2+e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解，且相应齐次方程的一个解为 $y_3=x$，则该微分方程的通解为 $\underline{y=3+x^2+C_1x+C_2e^{-x}}$。

例10.26 函数 $\boldsymbol{y=C_1e^x+C_2}$ 满足的一个二阶线性常系数齐次微分方程为：$\underline{y''-y'=0}$。

例10.27 设二阶线性齐次常系数微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 在区间 $0<x<+\infty$ 有界, 则实数 b 的取值范围是（ A ）

$A.\ b\ge 0$　　　$B.\ b\le 0$　　　$C.\ b\le 4$　　　$D.\ b\ge 4$

【解】考察任意一个二阶线性齐次常系数微分方程 $y''+py'+qy=0$. 欲使该方程的每一个解都有界, 充分必要条件是: 该方程的特征根 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ 的实部小于或者等于零.

对于方程 $y''+by'+y=0$, 特征根为 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$.

当且仅当 $b\ge 0$ 时, 两个特征根 $\lambda_{1,2}$ 的实部都小于或者等于零. 于是答案为 A .

例10.28 微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}+x$ 的一个特解是（ B ）

$A.\ ae^{-x}+bx+c$　　　$B.\ axe^{-x}+bx+c$

$C\ \ axe^{-x}+x(bx+c)$　　　$D.\ ae^{x}+x(bx+c)$

【解】微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}+x$ 的特解等于下列两个微分方程:

$$y''+2y'-3y=e^{-x},\ y''+2y'-3y=x$$

的特解之和. 根据有关的原理, 非齐次微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 具有形如 axe^{-x} 的特解; 非齐次微分方程 $y''+2y'-3y=x$ 具有形如 $bx+c$ 的特解. 因此非齐次微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}+x$ 具有形如 $axe^{-x}+bx+c$ 的特解. 于是应当选 B .

知识宝库考研社区(www.1zhao.org)友情提示：购买原版，饮水思源！

例10.29 设 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2x$ 是三阶线性齐次常系数微分方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ 的两个解. 则 a, b, c 的值分别为（ B ）

$A.\ a = 2, b = 1, c = 0$ $B.\ a = 1, b = 0, c = 0$

$C.\ a = 1, b = 0, c = 1$ $D.\ a = -1, b = 0, c = 0$

【解】由于该微分方程有特解 $y_1 = e^{-x}$ ，说明 $\lambda_1 = -1$ 是该方程的一个特征根；又由于该微分方程有特解 $y_2 = 2x$ ，说明 $\lambda_2 = 0$ 是该方程的一个特征根，而且是重根. 于是特征方程 $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ 有一个单根 $\lambda_1 = -1$ 和一个二重根 $\lambda_2 = 0$. 由此得到 $a = 1, b = 0, c = 0$. 于是应当选 B .

例10.30 已知方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有 3 个不同的特解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ ，且满足 $\dfrac{y_1(x) - y_2(x)}{y_2(x) - y_3(x)} \neq$ 常数，则原方程的通解 $y(x) = \underline{c_1[y_1(x) - y_2(x)] + c_2[y_2(x) - y_3(x)] + y_1(x)}$

例10.31 以 $y(x) = c_1 + c_2 e^x + x$ 为通解的二阶常系数线性常微分方程是______________________。

【解】由特征根为0,1，立得方程为 $y''(x) - y'(x) + 1 = 0$ 。

例10.32 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶线性齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解. 问能够由 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 的线性组合构成该方程的通解的充分必要条件为 （ B ）

$A.\ y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x) = 0$ $B.\ y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x) \neq 0$

$C.\ y_1(x) \cdot y_2'(x) + y_2(x) \cdot y_1'(x) = 0$ $D.\ y_1(x) \cdot y_2'(x) + y_2(x) \cdot y_1'(x) \neq 0$

【解】直接考察 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是否线性无关，即是否存在常数 c ，使得 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv c$.

如果 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性相关，则存在常数 c 使得 $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv c$

（ 因为是齐次方程，所以 y_1 和 $-y_1$ 都是方程的解. 因此如有必要，可以改变 $y_1(x)$ 的符号，

使$c>0$）即 $\ln y_2(x)=\ln y_1(x)+\ln c$，两端求导数得到 $\dfrac{y_2'(x)}{y_2(x)}=\dfrac{y_1'(x)}{y_1(x)}$

这与B冲突. 所以条件B能推出$y_1(x)$，$y_2(x)$线性无关，因而是问题的充分条件.

反之若$y_1(x)$，$y_2(x)$线性无关，则$\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\neq c$，即$\ln y_2(x)\neq\ln y_1(x)+\ln c$求导数

得到 $\dfrac{y_2'(x)}{y_2(x)}\neq\dfrac{y_1'(x)}{y_1(x)}$，由此立即得到$B$. 因此也是$y_1(x)$，$y_2(x)$线性无关

例10. 33 具有特解$y_1=e^{-x}$，$y_2=2xe^{-x}$，$y_3=3e^{x}$的三阶常系数线性齐次方程是（ ）

$A.\ y'''-y''-y'+y=0$　　　　$B.\ y'''+y''-y'-y=0$

$C.\ y'''-6y''+11y'-6y=0$　　　　$D.\ y'''-2y''-y'+2y=0$

例10. 34 若某二阶线性非齐次微分方程的两个解为$3+x^2$，　$e^{-x}+3+x^2$，且相应齐次方程的一个解为x，则该非齐次方程的通解为$\underline{3+x^2+C_1x+C_2e^{-x}}$。

例10. 35 设 参数$\delta\in \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{P_m(t)}$ 为$\boldsymbol{m}$次实系数多项式。函数$\boldsymbol{x=x(t), y=y(t)}$

分别满足如下微分方程

（A）　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=P_m(t)e^{-\delta t}\sin t$

（B）　$\dfrac{dy}{dt}+y=x^2(t)$

（1）　问当δ满足什么条件时，对方程（A）的任意解$\boldsymbol{x(t)}$有$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$

（2）　问当δ满足什么条件时，对方程（B）的任意解$\boldsymbol{y(t)}$有$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$

【证】（1）$x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}+Q_m(t)e^{-\delta t}[A\cos t+B\sin t]$，

其中$Q_m(t)$为t的m次多项式，C_1,C_2为任意常数，A,B为常数。

只当$\delta>0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

（2）$y(t)=e^{-t}(C+\int_0^t x^2(\tau)e^{\tau}d\tau)$，$C$为任意常数。

因$x^2(t)e^t\geq 0$，所以，对任意$\delta\in R$ 均有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t x^2(\tau)e^{\tau}d\tau\leq+\infty$，

而$\delta\leq 0$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=+\infty$，

只当$\delta > 0$时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t x^2(\tau)e^{\tau}d\tau}{e^t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2(t)e^t}{e^t} = \lim\limits_{t\to+\infty}x^2(t) = 0$，

此时有　$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t) = 0$.

例10. 36 已知e^x是二阶齐次线性常微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2} + q(x)y = 0$的一个解，则其通解为

$\underline{y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}}$ 。

【解】将解e^x代入方程立即得到$q(x) = -1$，于是可求得方程的另一个解e^{-x}。两个解e^x，e^{-x}线性无关，构成了方程的一个基本解组。因此通解为$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$。

例10. 37 设$f(x) = x\sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$，其中$f(x)$连续，求$f(x)$

【解】对$f(x) = x\sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$两边求导，得　$f'(x) = x\cos x + \sin x - \int_0^x f(t)dt$

两端再求导得到　$f''(x) = -x\sin x + 2\cos x - f(x)$, 即

$f''(x) + f(x) = -x\sin x + 2\cos x$

齐次方程$f''(x) + f(x) = 0$的通解是$C_1\cos x + C_2\sin x$

非齐次方程　$f''(x) + f(x) = -x\sin x + 2\cos x$

的特解应具有形式　$y^*(x) = x(Ax+B)\cos x + x(Cx+D)\sin x$

用待定系数法求出A, B, C, D得出其特解为$y^* = \dfrac{1}{4}x^2\cos x + \dfrac{3}{4}x\sin x$

所以方程的通解为

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{3}{4}x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

由$f(x)$的表达式直接看出$f(0) = 0$, 又有$f'(x)$的表达式(*)看出$f'(0) = 0$. 代入初值条件得到$C_1 = C_2 = 0$, 于是$f(x) = \dfrac{1}{4}x^2\cos x + \dfrac{3}{4}x\sin x$。

例10. 38 设$y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$是某个二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

解题思路: 设所求方程为　$y'' + py' + qy = f(x)$. 先求p, q, 即确定齐次微分方程$y'' + py' + qy = 0$。由题目所给的非齐次微分方程的三个解可以求出齐次微分方程

$y''+py'+qy=0$ 的两个解，进而确定 p,q．然后求 $f(x)$．

【解】 题目所给的非齐次微分方程的三个解求出齐次方程的两个解：

$$y_3-y_1=e^{-x},\ y_3-y_2=e^{2x}$$

于是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 两个根为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$，由此确定 $p=-1,q=-2$。

于是所求方程为 $y''-y'-2y=f(x)$。

将非齐次微分方程的解 $y_1=xe^x+e^{2x}$ 代入方程得 $f(x)=e^x-2xe^x$。（用 y_2,y_3 代入亦可）。

例10.39 设 $f(u)$ 二阶连续可导，且 $z=f(e^x\sin y)$ 满足：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$　求 $f(u)$.

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin yf'(e^x\sin y),\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\sin yf'(e^x\sin y)+(e^x\sin y)^2f''(e^x\sin y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\cos yf'(e^x\sin y),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\sin yf'(e^x\sin y)+(e^x\cos y)^2f''(e^x\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=uf'(u)+u^2f''(u)-uf'(u)+(e^{2x}-u^2)f''(u)=f(u)e^{2x}$$

$f''(u)=f(u)$.　$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$

例10.40 (01 数 2) 若 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$，$f(0)=0\ g(0)=2$；求

$$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx.\qquad \left(\int_0^{\pi}d\left(\frac{f(x)}{1+x}\right)=\frac{f(x)}{1+x}\bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}\right)$$

【解 1】 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$，

$$f''(x)=2e^x-f(x),\quad f(0)=0,\ f'(0)=2$$

求出 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$。

$$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\pi}d\frac{f(x)}{1+x}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$$

【解 2】$I=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)d\frac{1}{1+x}$

$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+f(x)\cdot\frac{1}{1+x}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)dx}{1+x}$

$=f(x)\cdot\frac{1}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}$

例10.41 设函数 $y(x)$ 在 R 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

【解】（1） 因为 $x(y(x))=x$，所以 $\frac{dx}{dy}y'=1$，从而 $\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2+\frac{dx}{dy}y''=0$ ，

故 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$。

代入原方程，得 $y''-y=\sin x$。

（2）方程 $y''-y=\sin x$ 对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$。

设方程 $y''-y=\sin x$ 的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，

代入得 $A=0, B=-\frac{1}{2}$，故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x\text{。}$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$，故所求初值问题的解为

$$y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x\text{。}$$

例10.42 用变量代换 $x=\cos t\ (0<t<\pi)$ 化简微分方程

$(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解。

【解】 $y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\csc t\cdot\frac{dy}{dt}$

$$y''_y=\frac{d}{dx}\left(-\csc t\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\csc t\cdot\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\csc^2 t\cot\frac{dy}{dx}+\csc^2 t\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入原方程得到

$$(1-\cos^2 t)\cdot\left(-\csc^2 t\cot t\cdot\frac{dy}{dt}+\csc^2 t\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\cos t\cdot\left(-\csc t\frac{dy}{dt}\right)+y=0$$

代简得 $\left(-\cot t\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\cot t\frac{dy}{dt}+y=0$， 即

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$，特征方程为：$\lambda^2+1=0$，于是通解为

$y=C_1\cos t+C_2\sin t$，其中 C_1，C_2 为任意常数。

由 $y|_{x=0}=1$，注意到 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，得到 $C_2=1$，

再由 $y'|_{x=0}=y'|_{t=\frac{\pi}{2}}=(-C_1\sin t+C_2\cos t)|_{t=\frac{\pi}{2}}=2$，得到 $C_1=-2$。

所以满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解为：$y=-2\cos t+\sin t$。

例10.43 设 $y=y(x)$ 是满足 $\begin{cases} y''-2by'+cy=0 \\ y(0)=y(2)=0 \end{cases}$ 的解， 具中 b,c 为实常数。试研究：

b,c 满足什么条件时，$y=y(x)$ 可为非零解？

【解】 特征方程：$\lambda^2-2b\lambda+c=0$，特征值 $\lambda_{1,2}=b\pm\sqrt{b^2-c}$.

当 $b^2-c\ge 0$ 时， 则特征根为两实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$、或实重根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，

由条件 $y(0)=y(2)=0$，可知此时原定解问题只有零解.

当 $b^2-c=-\beta^2<0$ 时， 一般解为 $y(x)=C_1e^{bx}\cos\beta x,+C_2e^{bx}\sin\beta x$，

由条件 $y(0)=y(2)=0$ 得 $\begin{cases} y(0)=C_1+C_2\cdot 0=0 \\ y(2)=C_2\cdot e^{2b}\sin 2\beta=0 \end{cases}$

$C_1=0$，$C_2\cdot e^{2b}\sin 2\beta=0$，

当 $\sin 2\beta=0$，即存在正整数 k，使得 $\beta=\sqrt{c-b^2}=\frac{k\pi}{2}$，即 $\frac{2}{\pi}\sqrt{c-b^2}=k$ 为正整数时，

原定解问题可有非零解（可有 $C_2\neq 0$），非零解为 $\hat{y}(x)=C_2e^{bx}\sin\left(kx\frac{\pi}{2}\right)$，

其中 C_2 为任意常数.