基础班微积分辅导第 9 讲

常微分方程 (一)

9.1 微分方程的基本概念

9.1.1 引言

定义9.1 包含未知函数的导数或微分的方程式就称为**微分方程**.

- 微分方程是用函数与导数的关系式来表达(一类)函数的一种方法。

定义9.2 如果未知函数为一元函数，则该微分方程称为**常微分方程**。

- **微分方程的基本问题**：列方程；解方程；解的定性研究。
- **微分方程的基本研究方法**

9.1.2 **微分方程的分类：**

定义9.3 方程中出现的最高阶导数的阶数称为这个微分方程的**阶**.

- n阶常微分方程的一般形式为 $y^{(n)}=f(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$

定义9.4 如果在上述方程中，函数 f 关于未知函数y及其各阶导数$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$都是一次整式，则称这个方程是**线性微分方程**，否则称为**非线性微分方程**.

- n阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x),$$

其中 $a_i(x),(i=0,1,\dots,n-1)$, $f(x)$ 是已知函数.

- $f(x)\equiv 0$，微分方程称为n阶齐次线性常微分方程。
- 否则微分方程称为n阶非齐次线性常微分方程。

9.1.3 **“解”的概念**

定义9.5 满足微分方程的函数，称为该方程的**解**。即将此函数代入方程，使其成为恒等式。

更细致一点，如果函数 $y=y(x)$ 在区间I 上具有n阶导数，且将其代入某n阶微分方程之后，使之成为恒等式，则称函数 $y=y(x)$ 是方程在区I 上的一个解

定义9.6 在n阶微分方程的解中含有n个独立的任常数$c_1,c_2,\dots,c_n$，也就是说，n阶微分方程的解的表达式为 $y=f(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$，称为微分方程的**通解**（**一般解**）.

定义9.7 虽然可以有无穷多个解，若从中确定微分方程一个解所需要的附加条件，称为**定解条件**. 适合定解条件的解称为微分方程的**特解**.

对于n阶微分方程,通常附加如下定解条件,来求得所需要的解，即

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,\dfrac{dy}{dx},\ldots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})=0 \\ y(x_0)=y_0\ ,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \end{cases}$$

这样的条件称为**初值条件**,上述问题就称为**初值问题**.

例 9.1 三个函数 $y_1(x)=C_1e^{-x^2}+1$，$y_2(x)=C_2$，$y_3(x)=y_1(x)+y_2(x)$，$y_4(x)=y_1(x)+y_2(x)-x$，其中C_1,C_2为任意常数，是否是下列四个方程之解，若是解，是什么解？

(1) $y'=2x(1-y)$； (2) $xy''-(1-2x^2)y'=0$； (3) $xy''-(1-2x^2)y'=1-2x^2$.

【解】根据解的概念，直接代入验证可知：

$y_1(x)$是方程(1)的通解；当$C_2=1$时，$y_2(x)$是方程(2)的一个特解；

$y_1(x)$和$y_2(x)$都是方程(2)的解，$y_3(x)$是方程(2)的通解；$y_4(x)$是方程(3)的通解.

例 9.2 设$y_1=e^{-x}$，$y_2=2x$是三阶线性齐次常系数常微分方程

$y'''+ay''+by'+cy=0$的两个解,则a,b,c的值分别为（　　）.

A. $a=2,b=1,c=0$；　　B. $a=1,b=0,c=0$；

C. $a=1,b=0,c=1$；　　D. $a=-1,b=0,c=0$.

【解】$y_1=e^{-x}$是解：$-1+a-b+c=0$，

$y_2=2x$是解：$2b+2cx=0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，可得到$b=0,c=0$。

由前者得：$a=1$。答案：B

例 9.3 已知$y=\dfrac{x}{\ln x}$是方程$y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$之解，则$\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$的表达式为(　A　)

(A) $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；　(B) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；　(C) $-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$；　(D) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$.

【解】将 $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 代入方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，

且 $y=\dfrac{x}{\ln x}$，$\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{x}{y}-1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2}-\dfrac{y}{x}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$。

例 9.4　（**04_1**）已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=\underline{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2}$.

【解】$t=e^x$，　$f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，$f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$f(1)=0\Rightarrow C=0$

例 9.5　已知函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} xy''+3xy'^2=1-e^x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

问 A 满足什么条件时可 $\forall x\ge 0$ 有（$x>0$）？

【解】设 $f(x)=Ax^2$，则 $f(0)=f'(0)=y(0)=y'(0)=0$，要使 $y(x)\le f(x)$，

只要　$y''\le f''(x)$，　$y''=\dfrac{1-e^x}{x}-3y'^2\le\dfrac{1-e^x}{x}$　（$x>0$）

故只要 $\dfrac{1-e^x}{x}\le 2A$．而 $\dfrac{1-e^x}{x}<1$（$x>0$），只要 $A\ge\dfrac{1}{2}$ 即有（$x>0$）。

例 9.6　设 $y(x)=c_1e^{-x^2}+c_2$ 是某个方程的解, 求方程的形式.

【解】$y'=2xc_1e^{-x^2}$，　$y''=4x^2c_1e^{-x^2}-2c_1e^{-x^2}$

$\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{2x^2-1}{-x}$，得到微分方程　$xy''-(1-x^2)y'=0$。

例 9.7　试研究 $\begin{cases} y'=x^3+xy^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 之解所确定函数的增减区间，极值点及凸凹区间。

【解】$\begin{cases} y'=x(x^2+y^2) \\ y(0)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y'\ge 0,\ if\ \ x\ge 0 \\ y'<0,\ if\ \ x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} y\uparrow,\ if\ \ x\ge 0 \\ y\downarrow,\ if\ \ x<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \min\limits_{x\in R} y(x)=y(0)=0 \\ y(x)\ge 0,\ \forall x\in R \end{cases}$；

$$\Rightarrow y''=x^2+y^2+x(2x+yy')=3x^2+y^2+x^4y+x^2y^3\geq 0\Rightarrow$$ 是下凸的函数。

9.2 常见的一阶微分方程的求解方法及一阶可积微分方程的类型

9.2.1 分离变量法

- 方程：形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$，或者 $u(x)dx=v(y)dy$ 的方程称为**变量分离方程**.
- 解法：分离变量后，两边积分：

$$u(x)dx=v(y)dy\Rightarrow\int u(x)dx=\int v(y)dy+C$$

- 初值问题的求解：$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\Rightarrow\int_{x_0}^{x}f(x)dx=\int_{y_0}^{y}\dfrac{dy}{g(y)}$.

例 9.8 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y},\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}(x_0y_0\neq 0)\Rightarrow\begin{cases}ydy=-xdx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$

【解 1】 $\begin{cases}ydy=-xdx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int ydy=\int -xdx+C\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+C\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\left(x_0^2+y_0^2\right)\text{ 或}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{\left(x_0^2+y_0^2\right)-x^2}\ ,\ if\ y_0>0,\\ y=-\sqrt{\left(x_0^2+y_0^2\right)-x^2}\ ,if\ y_0<0,\end{cases}$$

【解 2】 $\begin{cases}ydy=-xdx\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\Rightarrow\int_{y_0}^{y}ydy=\int_{x_0}^{x}-xdx\Rightarrow x^2+y^2=\left(x_0^2+y_0^2\right)$

9.2.2 可化为可分离变量型的方程

- 齐次方程：$\dfrac{dy}{dx}=g(\dfrac{y}{x})$；

解法：变量置换。令 $u(x)=\dfrac{y(x)}{x}\Rightarrow y'=xu'+u$，

$$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})\Rightarrow xu'+u=g(u)\Rightarrow u'=\frac{g(u)-u}{x}\text{。}$$

- 其他方程，如 $y'=f(ax+by)$，令 $u(x)=ax+by$.

$y'=f\left(\dfrac{ax+by}{cx+dy}\right)$，齐次方程，令 $u=\dfrac{y}{x}$

$y'=f\left(\dfrac{ax+by+k}{cx+dy+l}\right)$ 变量代换 $x=\tilde{x}+x_0, y=\tilde{y}+y_0$，

其中$\begin{cases} ax_0+by_0=k \\ cx_0+dy_0=l \end{cases}$，化成$\tilde{y}'=f\left(\dfrac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{c\tilde{x}+d\tilde{y}}\right)$。

例 9.9 $xy'=y(\ln y-\ln x)$.

【解 1】 原方程$\Rightarrow y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}\xrightarrow{y=xu(x)} u+xu=u\ln u$

$$\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|\ln u-1|=\ln Cx\Rightarrow y=xe^{1+Cx}$$

【解 2】 原方$\Rightarrow \dfrac{dy}{y}=(\ln y-\ln x)\dfrac{dx}{x}\Rightarrow d(\ln y)=(\ln y-\ln x)d\ln x$

$\xrightarrow{u=\ln y,v=\ln x}\dfrac{du}{dt}=u-t$，$\Rightarrow\begin{cases} y'=f(ax+by) \\ or\ y'+p(x)y=q(x) \end{cases}$型方程

例 9.10 解方程：$(y^2-3x^2)y'+3xy=0$.

【解】令$u=\dfrac{y}{x}$， 则$y'=u+xu'$， $u+xu'=\dfrac{3u}{3u^2-1}$

这是分离变量方程，……．（答案$ye^{\frac{3x^2}{2y^2}}=c$）

9.2.3 一阶线性方程

一阶线性方程：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

解法：（1）变易常数法：先解齐次方程，变易常数。

【解】相应的齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$

为变量可分离型方程，其通解为 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$， 其中C为任意常数。

假设$y=y(x)$是非齐次方程的解，$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$改写为

$\dfrac{dy}{y}=(-p(x)+\dfrac{q(x)}{y})dx$，则$y=e^{-\int p(x)dx}e^{\int\frac{q(x)}{y(x)}dx}$

记$C(x)=e^{\int\frac{q(x)}{y(x)}dx}$， 则$y(x)=C(x)e^{-\int p(x)dx}$， $C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$

$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$，其中$C$为任意常数。

于是方程$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$的通解为

$$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

（2）积分因子法：方程两边同乘积分因子函数 $e^{\int p(x)dx}$，

$$e^{\int p(x)dx}\left(y'+p(x)y\right)=q(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$\left(y(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx},$$

得到　$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$。

定理 9.1 齐次一阶线性常微分方程的解集构成一维线性空间；

非齐次一阶线性常微分方程的通解=齐次一阶线性常微分方程的通解

+非齐次一阶线性常微分方程的某一特解

例 9.11 设函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是一阶线性常微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个不同**的解**，

则常微分方程的通解为 ________________。答案：$y=C(y_1-y_2)+y_1$

例 9.12 解方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$

【解】1：$y(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(C+\int\dfrac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx)=\dfrac{1}{x}(C+\int\sin x\cdot dx)=\dfrac{1}{x}(C-\cos x)$。

【解】2：对方两边同乘 $e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$，得　$xy'+y=\sin x$.　　$(xy)'=\sin x$，

两边积分：$xy=\int\sin xdx+C$，$y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$.

例 **9.13** 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为 $\underline{\quad xy=2\quad}$。

一阶齐次线性方程初值问题求解；

全微分方程：$d(xy)=0,\quad xy=C$。代入初始条件，$C=2$。

例 **9.14** 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为 $\underline{\quad y=\dfrac{1}{5}x^3+\sqrt{x}\quad}$.

一阶线性方程初值问题求解
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x^2}{2}\\ y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}\end{cases}。$$

例 **9.15** 连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$ 则 $f(x)$ 是(B)。

(A) $e^x\ln 2$　　(B) $e^{2x}\ln 2$　　(C) $e^x+\ln 2$　　(D) $e^{2x}+\ln 2$

【解】两边对 x 求导， $f'(x)=2f(x)$，一阶线性方程，初值为 $f(0)=\ln 2$。

9.2.4 贝努利方程

- 方程：$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$

$n=0$：一阶线性方程；$n=1$：可分离变量方程。$n\neq 0\ or\ 1$：**贝努利方程**

- 解法： 用 y^n 除以方程两端将其化为,

$y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+p(x)y^{n-1}=q(x)$，或 $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{d\left(y^{1-n}\right)}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$，或

$\dfrac{dy^{1-n}}{dx}+(n-1)p(x)y^{n-1}=(1-n)q(x)$，令 $y^{1-n}=u$ 可解

$\dfrac{du}{dx}+(n-1)p(x)u=(1-n)q(x)$

这显然是关于 y^{1-n} 的一个一阶线性方程.

例 9.16 解方程 $x^2y'+xy=y^2$.

【解】贝努利方程: $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{y^2}{x^2}$，$n=2$

令 $u=y^{-1}=u(x)$ ，$u'=-y^{-2}y'=u'(x)$，$y'=-\dfrac{u'(x)}{u^2}$

$u'-\dfrac{1}{x}u=-\dfrac{1}{x^2}$，同乘以积分因子 $\dfrac{1}{x}$ 得到

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^3}$，于是 $\dfrac{u}{x}=\dfrac{1}{2x^2}+C$，即 $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{2x^2}+C$。

9.2.5 可凑成微分形式的方程，积分因子

第一，能凑全微分的部分先凑好；主要公式是

$$udv+vdu=d(uv),\quad \frac{udv-vdu}{u^2}=d\left(\frac{v}{u}\right)$$

第二，剩下部分利用已知的积分因子来试：这些已有的是

$udv-vdu=0$ 的五个积分因子：

$$\frac{1}{u^2}:\frac{udv-vdu}{u^2}=d\left(\frac{v}{u}\right);\quad \frac{1}{v^2}:\frac{udv-vdu}{v^2}=d\left(-\frac{u}{v}\right);$$

$$\frac{1}{uv}:\frac{udv-vdu}{uv}=d\left(\ln\frac{v}{u}\right);$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}:\ \frac{udv-vdu}{u^2+v^2}=\frac{\dfrac{udv-vdu}{u^2}}{1+\dfrac{v^2}{u^2}}=\frac{d\left(\dfrac{v}{u}\right)}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=d\left(arctg\frac{v}{u}\right);$$

$$\frac{1}{u^2-v^2}:\frac{udv-vdu}{u^2-v^2}=\frac{\dfrac{udv-vdu}{u^2}}{1-\dfrac{v^2}{u^2}}=\frac{d\left(\dfrac{v}{u}\right)}{1-\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=d\left(\ln\left|\frac{u+v}{u-v}\right|\right);$$

例 9.17 解方程 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

【解 1】 零齐型方程

原式 $\xrightarrow{u=y/x} xu'+u=\dfrac{1+u}{1-u}$， $xu'=\dfrac{1+u^2}{1-u}$

$\dfrac{1-u}{1+u^2}du=\dfrac{1}{x}dx$ 为变量可分离型方程，解为 $\sqrt{x^2+y^2}=C\,e^{\arctan\frac{y}{x}}$

【解 2】凑微分形式：

原式 $\Rightarrow xdy-ydy=xdx+ydx\Rightarrow xdy-ydx=ydy+xdx$

$$\Rightarrow xdy-ydx=\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\Rightarrow d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}d\ln\left(x^2+y^2\right),\ \Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=C\,e^{\arctan\frac{y}{x}}。$$

例 9.18 解方程 $y\,dx+(x-3x^3y^2)dy=0$.

【解】 $y\,dx+(x-3x^3y^2)dy=ydx+xdy-3x^3y^2dy=d(xy)-3x^3y^2dy=0$

两边同乘 $\dfrac{1}{(xy)^3}$ ， $\dfrac{d(xy)}{(xy)^3}-\dfrac{3dy}{y}=0$,

$\dfrac{-1}{2}d\left(\dfrac{1}{(xy)^2}\right)-3d(\ln y)=0$，得 $d\left(\dfrac{-1}{2(xy)^2}-\ln y^3\right)=0$,

原方程的通解为 $\dfrac{1}{2(xy)^2}+3\ln y=c$.

9.3 高阶可降阶类型方程的求解

一般情况下, 求解高阶方程更加困难. 处理高阶方程的思路之一是设法降低方程的阶. 在这里, 仅对二阶方程 $y''=f(x,y,y')$ 的几种右端函数缺变量的情形进行讨论.

9.3.1 方程不显含 y,y'（导数已解出）$y^{(n)}=f(x)$,可通过n次积分可以得到通解. 逐次积分

得到 $$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}f(t_1)dt_1+c_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t_1}f(t_1)dt_2\right)dt_1+c_1x+c_2,$$

$$y=\int_{x_0}^{x}\cdots(\int_{x_0}^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n)\cdots dt_1+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots+c_{n-1}x+c_n,$$

利用归纳法可以证明 $\int_{x_0}^{x}\cdots(\int_{x_0}^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n)\ldots dt_1=\dfrac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt$ 。

将其代入上面最后一式，方程通解变为

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)dt+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$$

例 **9.19** 解方程 $y^{(4)}=\sin x+x$.

【解】由公式 $y=\dfrac{1}{6}\int_0^x(x-t)^3(\sin t+t)dt+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$

由分部积分法得到,方程通解

$$y=\sin x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^3}{6}+x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

$$y=\sin x+\frac{x^5}{5!}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$$

9.3.2 不显含 y 的方程， $y''=f(x,y')$ 或 $F(x,y',y'')=0$

令 $p(x)=y'$， $y''=p'(x)$，方程变成： $p'=f(x,p)$，

这是一阶方程，有可能求解。

例 9.20 解方程 $xy''=y'\ln y'$.

【解】令 $p(x)=y'$，代入方程, 则原方程化为 $x\dfrac{dp}{dx}=p\ln p$，

由此解出 $p=e^{c_1x}$, 于是原方程的通解为 $y=\int pdx=\dfrac{1}{c_1}e^{c_1x}+c_2$.

9.3.3 方程不显含 x， $y''=f(y,y')$ 或 $F(y,y',y'')=0$

令 $p=p(y)=\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$,

代入方程得 $p\dfrac{dp}{dy}=f(p,y)$. 得到一个关于未知函数 p 和自变量 y 的一阶方程.

例 9.21 解方程 $y''=\dfrac{1+(y')^2}{2y}$.

【解】令 $p=p(y)=\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$, 代入方程得到 $p\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1+p^2}{2y}$

即 $\dfrac{2pdp}{1+p^2}=\dfrac{dy}{y}$, 两端积分得到 $\ln(1+p^2)=\ln y+\ln c_1$.

即 $1+(\dfrac{dy}{dx})^2=c_1y$. 分离变量, 将上式改写成 $\dfrac{1}{\pm\sqrt{c_1y-1}}=dx$.

解此方程得 $\pm\dfrac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2$，化简得 $\dfrac{4}{c_1^2}(c_1y-1)=(x+c_2)^2$。

例 9.22 求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6}, y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

【解】令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u，$$

$u=0$，$y=C$ 不复合初值条件，舍去。

$u\neq 0$ 时，得到 $u'+u\tan y=\dfrac{1}{\cos y}$，

解为 $u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，由 $y(-1)=\dfrac{\pi}{6}, y'(-1)=\dfrac{1}{2}$，得 $C_1=0$。

再解方程 $\frac{dy}{dx}=\sin y$ 得到 $\ln\left|\csc y-\cot y\right|=t+C_2$

由 $y(-1)=\frac{\pi}{6}$ 得出 $C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$，

定解问题之解为 $\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$

9.4 应用问题举例

（一）微分方程应用的基本方法：

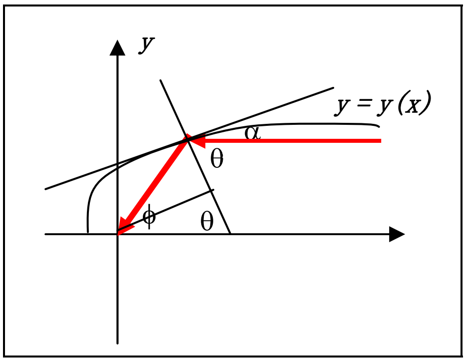
规律翻译法和微量分析法。

（二）微分方程应用的基本步骤：

列方程；解方程；解的分析。

（三）微分方程应用题的基本范围.

例 9.23 求曲线 $y=y(x)$，使其上每点 $M(x,y)$ 的法线平分过这点的水平线与矢径所交之角。



【解】(1) **列方程**：作示意图如右．从几何分析可知：$\alpha=\frac{1}{2}\varphi$ ，由于：

$$\tan\alpha=y'(x),\quad \tan\varphi=\frac{y}{x}$$

$$\tan\alpha=\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

将 $\tan\alpha=y'(x)$，$\tan\varphi=\frac{y}{x}$ 代入上式关系：

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}.$$

(2) **解方程**:（**法一**）这是零齐方程⋯.

（法二）原方程变形为 $ydy+xdx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

$$\Rightarrow\frac{ydy+xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx\Rightarrow\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=dx$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=x+c\Rightarrow y^2=2cx+c^2,$$ 这是抛物线。

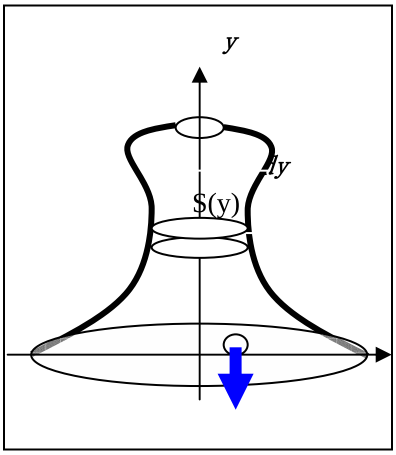
例 9.24 将质量为 m 的物体，以初速 v_0 垂直向上射出，设空气阻力与运动速度的平方成正比，比例系数 $k>0$。求物体到达的高度，到这最高处的时间，落到原地时的速度及下

落时间？

【解】取向上为高度正方向的坐标系，则有方程及条件：

上升方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$ ；下落方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg + kv^2 \\ v(t^*) = 0 \end{cases}$ 。

例 9.25 一容器总高为 H，在高度为 h 处的断面面积为 $S = S(h)$，在底部有一面积为 s_0 小孔，若水流出速度 v 是水深 h 的函数，$v = \mu\sqrt{2gh}$ ，若在容器装满水后，将底部小孔打开，问多久水将流尽？



【解】设 y 轴方向为水深

- 列方程：微元平衡分析，t 到 $t+dt$ 的时段内：

水深变化 dy 引起的水量变化= dt 时间内流出的水量

即：$\begin{cases} -S(y)dy = \mu\sqrt{2gy}\,dt \\ y(0) = h \end{cases}$

- 解方程：这里未知函数是 $y = y(t)$，$S(y)$是已知函数。

$$\frac{-S(y)dy}{\sqrt{y}} = \mu\sqrt{2g}\,dt,\ \int_h^y \frac{-S(y)}{\sqrt{y}}dy = \int_0^t \mu\sqrt{2g}\,dt,\ t = \frac{1}{\mu\sqrt{2g}}\int_y^h \frac{S(y)}{\sqrt{y}}dy\ 。$$

例 9.26 某湖泊水量为 V，每年入湖含污物 A 的污水，入湖污水量 $\dfrac{V}{6}$，入湖不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出量 $\dfrac{V}{3}$ 。已知 1999 年底湖中有污物 $5m_0$，超过国家标准。为治污从 2000 年初开始，限定入湖污水含 A 浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$，问多少年后湖中含污物的量降至 m_0。

【解】$m(t), P(t), Q(t)$ 分别表示第 t 年湖内污物 A 总量，排入速度，排出速度。

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{V}\frac{V}{6} - \frac{m}{V}\frac{V}{3},\quad m = \frac{m_0}{2} - ce^{-\frac{t}{3}}$$

$$m(0) = 5m_0,\quad m = \frac{m_0}{2} + \frac{9}{2}m_0 e^{-\frac{t}{3}}$$

$$m = m_0, t = 6\ln 3$$

例 9.27 设曲线 L 位于 Oxy 平面的第一象限内并经过点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$。$L$ 上任一点 M 的切线与 y 轴交于 A 点，已知切点 M 到 A 点的距离等于原点到 A 的距离，求曲线的方程。

【解】设曲线为 $y=y(x)$， $M(x,y)$，则切线 $Y-y=y'(x)(X-x)$

$A(0,y-xy')$。 $\sqrt{x^2+x^2y'^2}=|y-xy'|$， $\begin{cases} y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy} \\ y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

为齐次方程。

9.5 综合例题

例 9.28 设 $p(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续非负, 如果微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$, 则 $p(x)$ 必然满足（ D ）。

$A.\ \lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=0$　　$B.\ \lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=+\infty$　　$C.\ \int_a^{+\infty}p(x)dx$ 收敛　　$D.\ \int_a^{+\infty}p(x)dx$ 发散

例 9.29 已知一阶线性方程 $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 的两个不同解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 则该方程的通解为（ B ）。

$A.\ c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$　　　　$B.\ c_1y_1(x)+c_2[y_2(x)-y_1(x)]$

$C.\ y_1(x)+c[y_2(x)-y_1(x)]$　　　　$C.\ y_2(x)+c[y_2(x)+y_1(x)]$

例 **9.30** 求解一阶初值问题： $\begin{cases} (y-\dfrac{1}{x})dx+\dfrac{1}{y}dy=0 \\ y\big|_{x=1}=2 \end{cases}$

【解 **1**】这是贝努利方程: 原方程变形为 $y'-\dfrac{1}{x}y=-y^2$ ，

令 $y^{-1}=u$，代入得 $u'+\dfrac{1}{x}=1$，解得 $u=\dfrac{C}{x}+\dfrac{x}{2}$，

于是得 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{C}{x}+\dfrac{x}{2}$，由 $y(1)=2$，得 $C=0$，所以 $y=\dfrac{2}{x}$。

【解 **2**】 原方程变形为 $xdy-ydx=-xy^2dx$

$$\Rightarrow \frac{xdy - ydx}{y^2} = -xdx \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{x=1}^{x=x} d\left(\frac{x}{y}\right) = \int_{x=1}^{x} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \left.\frac{x}{y}\right|_{x=1}^{x} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=1}^{x} \Rightarrow y = \frac{2}{x}。$$

例 9.31 若方程 $y' + p(x)y = 0$ 的一个特解为 $y = \cos 2x$，则该方程满足初值条件 $y(0) = 2$ 的特解为（ D ）

$A.\cos 2x + 2$　　　$B.\cos 2x + 1$　　　$C.\,2\cos x$　　　$D.\,2\cos 2x$

【解】(方法 1)首先，由 $y(0) = 2$，所以排除 A, B 选项。一阶线性齐次方程 $y' + p(x)y = 0$ 任意两个解只差一个常数因子，因此正确答案为 D.

（方法 2---不可取）将 $y = \cos 2x$ 代入方程求出函数 $p(x)$，再求解方程得正确答案为 D.

例 9.32 设 $p(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且不恒等于零， $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同特解，则下列结论中错误的是（ C ）

$A.\ \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \equiv$ 常数；(假设其中 $y_1(x) \neq 0$)；　　$B.\ c(y_1 - y_2)$ 构成方程的通解；

$C.\ y_1 - y_2 =$ 常数；　　　　$D.\ y_1(x) - y_2(x)$ 在任何一点不等于零．

【解】因为，在 $p(x)$ 不恒等于零的条件下，非零常数不可能是微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的解．如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是两个不同的解，那么 $y_1 - y_2$ 也是这个方程的解，从而 $y_1 - y_2$ 不能等于非零常数。 从解的概念可知， A, B 是成立的。

D 也是成立的．因为对于一阶微分方程 $y' + p(x)y = 0$，两个不同的解不能满足相同的初值条件．如果存在点 x_0，使得 $y_1(x_0) = y_2(x_0)$．令 $y_0(x) = y_1(x) - y_2(x)$，则 $y_0(x)$ 是该方程的解，并且满足初值条件 $y_0(x_0) = 0$．于是由微分方程解的存在唯一性定理推出 $y_0(x)$ 恒等于零，进而又推出 $y_1(x) \equiv y_2(x)$，与题设冲突.

例 9.33 解方程 $2xdy - ydx = 2y^2dy$．

【解 1】 对 x 的线性方程 ：

原方程$\Rightarrow -y\dfrac{dx}{dy}+2x=2y^2 \Rightarrow \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{2}{y} \Rightarrow y=Ce^{-\frac{x}{2y^2}}$.

【解 2】 伯努利方程 ： 原方程$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{1}{x}y^2$.

【解 3】 凑微分形式 ： 方程$\Rightarrow xdy^2-y^2dx=2y^2dy \Rightarrow \dfrac{xdy^2-y^2dx}{y^4}=\dfrac{2y^2dy}{y^4}$.

【解 4】 变成齐次方程 ： 原方程$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{dy^2}{dx}=\dfrac{y^2}{2x-y^2}$

$$\xrightarrow{u=y^2}\frac{du}{dx}=\frac{2u}{2x-u},\qquad \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{2\frac{u}{x}}{2-\frac{u}{x}}.$$

例 9.34 求曲线方程，在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长，

如果曲线：　(1) 向下凸；　2) 向上凸.

【解】法线　$Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，其中$(x,y)\in C$，$(X,Y)\in N$

令$Y=0$，得$X=x+yy'$，于是法线之长为 $\sqrt{(yy')^2+y^2}=|y|\sqrt{1+(y')^2}$。

列方程　(1) 向下凸: $\dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}=\dfrac{1}{|y|\sqrt{1+(y')^2}}$

（2）向上凸: $\dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}=\dfrac{-1}{|y|\sqrt{1+(y')^2}}$

解方程 (1) 向下凸: $\dfrac{y''}{1+(y')^2}=\dfrac{1}{y}$，　令 $p(y)=y'$，$\dfrac{pdp}{1+(p)^2}=\dfrac{dy}{y}$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln(cy),\qquad \frac{dy}{\sqrt{(cy)^2-1}}=\pm dx$$

$$\begin{cases}\ln\left(cy+\sqrt{(cy)^2-1}\right)=\pm(x-c_1)\\ \ln\left(cy-\sqrt{(cy)^2-1}\right)=\mp(x-c_1)\end{cases},\qquad \begin{cases}cy+\sqrt{(cy)^2-1}=e^{\pm(x-c_1)}\\ cy-\sqrt{(cy)^2-1}=e^{\mp(x-c_1)}\end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2c}\left(e^{(x-c_1)}+e^{-(x-c_1)}\right)=\frac{1}{c}sh(x-c_1)$$

(2) 向上凸: $\dfrac{y''}{1+(y')^2}=\dfrac{-1}{y}$，曲线为 $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$。

例 9.35 求方程 $y''+2x(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 的解。

【解】属于不显含 y 的可降阶类型。令 $y'=u$，原方程变为 $u'+2xu^2=0$，$\dfrac{1}{u}=x^2+C_1$，

由 $u(0)=y'(0)=-\dfrac{1}{2}$，解出 $C_1=-2$；再解方程

$$y'=\frac{1}{x^2-2},\qquad \text{得到 } y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2。$$

由 $y(0)=1$，$C_2=1$，于是得到解 $y=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}\right)$。

例 9.36 与曲线族 $y=ax^3$， $a\in R$ 正交的曲线是________________.

【解】曲线族 $y=ax^3$， $a\in R$，满足的方程是： $y'=3ax^2$， $\dfrac{y}{x}=ax^2$， $y'=\dfrac{3y}{x}$.

其正交的曲线为 $y'=-\dfrac{x}{3y}$，其通解为 $x^2+3y^2=C$。

例 9.37 质量为 m 一辆汽车在公路上高速行驶，遇情况急刹车，此时速度达 v_0，刹车后滑行距离 s_0 后终于停下。假设：刹车后滑行阻力 f 为常数，空气阻力与速度的平方成正比，比例系数为 c。试求 $f=?$

【解】 \ $\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2}=-f-c\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \\ s(0)=0,\ \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0 \end{cases}$　　（$f=\dfrac{c\,v_0^2}{e^{\frac{2c}{m}s_0}+1}$）

例 9.38 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，若曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1, x=t\ \ (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转的体积为 $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right]$，求 $y=f(x)$ 满足的微分方程，并求该方程满足初始条件 $y(2)=\dfrac{2}{9}$ 的解.

【解】 $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right]=\displaystyle\int_1^t\pi f^2(x)dx$，求导， $3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t)$

$y=f(x)$ 满足的微分方程为 $x^2y'=3y^2-2xy$，此为为齐次方程，解为：

$y-x=cx^3y$；由 $y(2)=\dfrac{2}{9}$， 得到 $c=-1$，解为： $y-x=-x^3y$。

例 9.39 曲线 $y=y(x)$ 通过原点并在第一、四象限，过曲线上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 y 轴的垂线，这二直线分别与 y 轴交于 T 点和 Q 点．则三角形 PQT 的面积与曲线在区间 $[0,x]$ 上的曲边三角形面积相等。求其曲线的方程.

【解】设曲线为 $y=y(x)$，则切线为 $Y-y=y'(x)(X-x)$

确定点 $P(x,y)$，$Q(0,y)$ 与 $T(0,y-xy'(x))$.

$$\frac{1}{2}x^2y'(x)=\int_0^x y(t)dt,\qquad \text{求导，}\ \frac{x^2}{2}y''+xy'-y=0$$

$$y=c_1x+c_2x^{-2},\qquad y(0)=0，\text{故 } y=cx。$$

例 9.40 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f'(1)=2$，且 $\forall x,y>0,\ f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 成立，求 $f(x)$。

【解】首先 $f(1)=1f(1)+1f(1)=2f(1)$，$f(1)=0$。

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(x(1++\frac{y}{x})\right)-f(x)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{xf\left(1+\frac{y}{x}\right)+\left(1+\frac{y}{x}\right)f(x)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}}+\frac{1}{x}f(x)$$

$$=f'(1)+\frac{1}{x}f(x)=2+\frac{1}{x}f(x)$$

求解初值问题 $\begin{cases} f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=2 \\ f(1)=0 \end{cases}$ 得到

$$f(x)=x\left(\int\frac{2}{x}dx+C\right)=2x\ln x+Cx，\text{再由 } f(1)=0$$

解出 $C=0$，$f(x)=2x\ln x$。