基础班微积分辅导第 2 章

函数的极限与连续函数

2．1 函数的极限概念

2．1．1 函数在无穷远处的极限

在掌握好数列极限的概念与方法的前提下，可以顺利地学好函数的极限，只需要注意在函数极限问题里，自变量的趋向应包括以下 6 种情况：

$x \to x_0^-$， $x \to x_0^+$， $x \to x$， $x \to +\infty$， $x \to -\infty$， $x \to \infty$。

掌握好函数极限的概念与方法，是进一步为学习函数连续性、导数等后续概念的重要基础。

定义 2.1 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内有定义，$\forall \varepsilon > 0$，若存在某个常数 A 与 $X > 0$，使当 $x > X$ 时恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 $y = f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时的极限为 A，或收敛于 A。记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$。

若在上述的常数 $A = 0$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于正无穷大时的无穷小量。若上述定义中的 A 不存在，则称 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时的极限不存在，或发散。

注：上述定义的几何意义与数列极限香类似。

定义 2.2 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内有定义，$\forall G > 0$，若存在某个常数 A 与 $X > 0$，使当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x)| > G$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于正无穷大时的无穷大量。记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$。

当然，还有有如下的两种情况：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (\ f(x) > G\ ) \text{ 与 } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad (\ f(x) < -G\ )$$

类似上述两个定义，可给出 $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限与 $f(x)$ 为无穷大量的定义。读者可练习给出下列 $x \to -\infty$ 时的极限与无穷大量的定义描述：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A，\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty。$$

定义 2.3 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，若存在某个常数 A 与 $X > 0$，使当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 $y = f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限为 A，或收敛于 A。记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。

若在上述的常数 $A = 0$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于无穷大时的无穷小量。 若上述定义中

的 A 不存在，则称 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限不存在，或发散。应特别注意，这里 x 以双向方式趋于无穷大。

类似前面的定义，还可以给出当 x（双向）趋于无穷大时，$f(x)$ 为无穷大量的三种描述，即正无穷大量，负无穷大量和（双向）无穷大量。请读者完成这些练习。

2．1．2　函数在一点处的极限

定义 2.4　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $N^*(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 内有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，都存在某个常数 A 与 $\delta_0>0$（$\delta_0<\delta$），使当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $y=f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限为 A，或收敛于 A。记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A。$$

若在上述的常数 $A=0$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷小量。 若上述定义中的 A 不存在，则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限不存在，或发散。

定义 2.5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0,x_0+\delta)$（$\delta>0$）内有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，都存在某个常数 A 与 $\delta_0>0$（$\delta_0<\delta$），使当 $0<x-x_0<\delta_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的右极限为 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

而当函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0)$（$\delta>0$）内有定义，若 $\forall\varepsilon>0$，都存在某个常数 A 与 $\delta_0>0$（$\delta_0<\delta$），使当 $-\delta_0<x-x_0<0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的左极限为 A，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$。

特别，上述三个极限)式中的 A 易为 ∞ 或 $\pm\infty$（即 $|f(x)|$ 取值无限变大）时，分别称 $f(x)$ 在相应趋向下的无穷大量或正、负无穷大量。记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty，\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty，\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty \quad 。$$

2．2 函数极限存在的条件

定理 3.1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$（或 $\infty,\pm\infty$）存在的充要条件是：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（或 $\infty,\pm\infty$）与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$（或 $\infty,\pm\infty$）都存在，且 $A=B$（或 $\infty,\pm\infty$）。

定理 2.2 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（或 $\infty,\pm\infty$）存在的充要条件是：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=B$ 都存在，且 $A=B$。

2．3　极限存在的准则

2．3．1 单调有界准则

定理 2。3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,a+\delta)$（$\delta>0$）内有定义且单调减有下界，则右极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$ 存在。而当函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a-\delta,a)$（$\delta>0$）内有定义且单调增有上界时，左极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=A$ 存在。

2．3．2 夹逼准则

定理 2.4　设函数 $y=f(x)$ 与 $g(x),\phi(x)$ 在区间 $(a-\delta,a+\delta)$（$\delta>0$）内有定义且满足 $\phi(x)<f(x)<g(x)$，若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\phi(x)=A$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 存在。

2．3．3 无穷小量与有阶函数的乘积的极限存在，且仍为无穷小量。即

设 $f(x)$ 在某种趋向下有界，例如，若存在某个常数 $M>0$，

$\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $|f(x)|\le M$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$。

这可以作为极限存在的准则来应用。

2．4　两个标准极限

利用上述两个准则可以得到下述两个标准极限（重要极限）

标准极限 1　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{2.1}$$

标准极限 2　$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \tag{2.2}$$

2．5 函数极限的性质

2．5．1 运算性质（以下各条均适用于 $x\to\pm\infty,\infty$ 的情形）

（1）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$C$ 为实常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(C\cdot f(x)\right)=CA$。

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$

（3）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=AB$。

（4）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$g(x)\ne 0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\ne 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$。

（5）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\quad f(x)\ne 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$。

利用上述运算性质可以计算或判断某些极限。为方便计算，遇到无穷大量时，应设法将无穷大量转化为无穷小量。上述**运算性质的命题形式均为充分条件，不满足前面条件时，结论不一定不成立。在考试中，极限的运算法则的运用错误是常见错误，应特别注意避免这类错误。**

2．5．2 解析性质及复合极限定理

函数极限具有一些重要的解析性质，主要包括极限的保序性（保号性）与复合极限定理，掌握这些性质对处理极限以及后续的微分与积分内容会有较大帮助。下面给出这些性质均以 $x \to x_0$ 的情形为例。

定理 2.5 极限的保序性（保号性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则在 x_0 的附近（除去 x_0）某区间内必然有 $f(x)>0$。换言之，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则存在 x_0 的去心邻域 $N(x_0,\delta)=\{x\big|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，使当 $x\in N(x_0,\delta)$ 时，必然有 $f(x)>0$。又若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A<0$，则在 x_0 的附近（除去 x_0）某区间内必然有 $f(x)<0$。

【证】 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则 $\forall\varepsilon>0$，都存在某个常数 A 与 $\delta>0$，

使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 或 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$。

特别取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，则 $\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3A}{2}$，于是有 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$。

由此性质，可以推论：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，则存在 x_0 的某去心邻域 $N(x_0,\delta)=\{x\big|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，使当 $x\in N(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)>g(x)$。并且，进一步有如下推论：

极限保序性的逆（请读者自行练习证明）

若在 x_0 的附近（除去 x_0）某区间内 $f(x)>0$，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\ge 0$；而当在 x_0 的附近（除去 x_0）某区间内 $f(x)<0$ 时，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\le 0$。

定理 2.6　有界性

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的附近（除去 x_0）某区间内有界。

定理 2.7 复合极限定理

若 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A, u=u(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u_0$，$x\ne x_0$ 时，$u\ne u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(u(x)) = A \qquad (2.3)$$

复合极限定理，也适用于序列的极限运算。这一定理可以使得极限计算变的更加快捷方便。 利用极限运算性质及复合极限定理可以得到极限的等价描述，以及两个标准极限的变形表达式如下

$$\lim_{x \to (\cdot)} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \qquad (2.4)$$

$$\lim_{x \to (\cdot)} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \qquad (2.5)$$

$$\lim_{x \to (\cdot)} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e \qquad (2.6)$$

其中$\alpha(x)$为某种趋向$x \to (\cdot)$时的无穷小量，且（2.5）与（2.6）中的$\alpha(x) \neq 0$。

2．6 无穷小量比阶

定义 2.6 设$\alpha(x)$与$\beta(x)$为某种趋向$x \to (\cdot)$时的无穷小量，若满足

$$\lim_{x \to (\cdot)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mu \qquad (2.7)$$

则 （1）当$\mu \neq 0$时，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$为同阶无穷小量（$x \to (\cdot)$），特别$\mu = 1$时，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小量（$x \to (\cdot)$），可记为$\alpha(x) \sim \beta(x)$。

（2）当$\mu = 0$时，称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小量（$x \to (\cdot)$）。

（3）当$\mu = \infty$时，称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小量（$x \to (\cdot)$）。

利用极限性质及运算，可以得到下列几组常用等价无穷小量（$x \to 0$）

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1 + x) \qquad (2.8)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \qquad (2.9)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0) \qquad (2.10)$$

$$e^x - 1 \sim x \qquad (2.11)$$

$$(x + 1)^\lambda - 1 \sim \lambda x \quad (\lambda \in R) \qquad (2.12)$$

$$\sin x - x \sim -\frac{1}{6} x^3 \qquad (2.13)$$

注：（1）以上等价关系可在广义下应用，即等价关系中的x在应用中常换为满足$\lim_{x \to (\cdot)} \alpha(x) = 0$的某个$\alpha(x)$。

（2）在极限运算中，可以用等价价无穷小量进行替换，但必须注意，替换只能在因子位置上进行，因等价无穷小量是用因子乘积$\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\beta(x)}$定义的。非法替换是常见错误。

例 2．1　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1})=$______

（A）$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$；（B）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；（C）$\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$；（D）不存在

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+1}}$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，因此该极限不存在，因此选(D)。

例 2．2　求极限　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

【解】错误做法举例

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=2$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}=0$，因此$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$不存在。

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$也不存在。

由此得出结论原极限不存在。这一做法的错误在于没有正确使用极限的运算准则。极限运算准则均为充分条件，两个极限不存在的函数，其和的极限未必不存在。正确做法如下：

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{|x|}=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=2-1=1$$

于是 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$。

例 2．3 已知极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x-1}\right)^{x-1}=e^{-2}$，求常数 a。

【解】已知极限为“1^∞”型，应考虑应用标准极限 2。将已知极限表达式凑成标准型，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x-1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1-a}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{1-a}\cdot(1-a)}$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1-a}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{1-a}}\right]^{1-a}$$

由 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1-a}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{1-a}}=e$，应用复合极限定理得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x-1}\right)^{x-1}=e^{1-a}=e^{-2},$$

令 $e^{1-a}=e^{-2}$，即有 $1-a=-2, a=3$。

例 2.4　求极限 $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)$

【解】$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-1}x^2\left(e^{1-\cos\frac{1}{x}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{-1}x^2(1-\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}e^{-1}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}e^{-1}。$$

例 2.5 求极限 $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$

【解】 $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\left(3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}\ln 3}-1\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln 3=1\cdot 1\cdot \ln 3。$$

下列做法是错误的！第二个等号犯了极限运算法则运用错误，答案对实属巧合。

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left((3^{\frac{1}{x}}-1)-(3^{\frac{1}{x+1}}-1)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(3^{\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to+\infty} x^2(3^{\frac{1}{x+1}}-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}\ln 3}-1\right)-\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x-1}\ln 3}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty} x^2\frac{\ln 3}{x}-\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{\ln 3}{x-1}=(\ln 3)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=\ln 3$$

2．7 连续函数概念

连续函数的概念包括两个方面，首先是函数在一点处连续的概念，主要是用来刻画函数在一点及其附近的局部情况或微观性态；其次是函数在区间上连续的概念，主要是用来刻画函数在大范围内的全局情况或宏观性态。 而所有这些概念都将是进一步研究函数性质的必备基础。

2．7．1 函数在一点连续的概念

定义 3.6 设函数 $y=f(x)$

（1）在 x_0 的某邻域 $N(x_0,\delta)=\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 内有定义；

（2）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在；

（3） $A=f(x_0)$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。以上三条见可称为函数在一点连续的三要素，缺一不可。又若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内的任意一点处都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上或 (a,b) 内连续。

$y=f(x)$ 在 x_0 处连续的直观意义是， 当 $|\Delta x|=|x-x_0|$ 任意小时，$|\Delta f(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|$ 也可以任意小。

对初等函数而论，连续性的重要结论是：一元初等函数在其定义域内部的任意区间内都是连续的。

函数在一点连续的定义可有以下两种等价性描述：

等价性描述 1：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $N(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 内有定义，并且满足 $f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为无穷小量（$x\to x_0$）。则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。

等价性描述 2：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $N(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 内有定义，引入记号 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$，若有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续。

以上两种等价描述常常成为判断函数在一点处连续的手段。。

定义 2.7　若满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处为右连续，而满足 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 时，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处为左连续。

于是，判断函数在一点处连续的方法还有以下定理

定理 2.8　函数　$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$。

或描述为：在一点处连续的充要条件是在该点处左连续，且右连续。

定义 2.8 对函数 $y=f(x)$ 不连续的点，称之为 $f(x)$ 的间断点。对间断点做如下分类：

当单边极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在却不连续时，称 x_0 为第一类间断点。其中满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 的间断点，称之为可去型间断点。

可去型间断点的可能情况是：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义，

而使得 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 的第一类间断点又常称为跳跃型间断点。

除去第一类间断点以外的所有间断点统称为第二类间断点。其中使得 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的点称为无穷间断点；当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 正负交替取值或大小交替变化取值的点称为震荡间断点。

2．7．2 函数在一点处连续的性质

性质 1 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$。

性质 2（保号性）　若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，并且 $f(x_0)>0$，则存在 x_0 的某邻域

$N(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ ，使得当 $x\in N(x_0,\delta)$ 时，恒有 $f(x)>0$ 。

性质 3（有界性）若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，则存在常数 $M>0$ 与 x_0 的某邻域

$N(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ ，使得当 $x\in N(x_0,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le M$ 。

即 $f(x)$ 在某 $N(x_0,\delta)$ 内有界。

注：性质 1 可以使得对连续函数极限的计算大为简化（变为简单的函数值计算）；而性质 2 称为连续函数的保序性或保号性，在后续内容学习中，这对函数的性态研究以及积分的保序性有着重要作用。性质 3 也常用于对函数性态研究的根据。

2．7．3 连续函数的运算性质 复合函数与反函数的连续性

定理 2。9　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则函数 $af(x)\pm bg(x)$， $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处连续，且当 $g(x_0)\neq 0$ 时，函数 $f(x)/g(x)$ 在 x_0 处亦连续。

定理 2。10　复合连续定理

若 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续， $u=u(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续， 且 $u(x_0)=u_0$，

则 $f(u(x))$ 在 $x=x_0$ 处连续 。

定理 2. 11 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调且连续，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调连续。

2．8 闭区间上连续函数的性质

函数在区间上连续的概念及一系列性质，是研究函数在大范围内的全局性态或宏观性态的重要手段，也是后续学习内容的重要基础。

定理 2.12　有界性定理

若函数 $y=f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即存在 $M>0$，使 $\forall x\in[a\ b]$，恒有 $|f(x)|\le M$ 。

定理 2.13 最大最小值定理

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大最小值。即存在 $x_M\in[a,b]$ 与 $x_m\in[a,b]$ 使得 $f(x_M)=M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ 且 $f(x_m)=m=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$。

注：若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且单调，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大最小值只能在区间端点取得。

定理 2.14　零点定理（根的存在定理）

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则(至少)存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$。

分析：几何意义是直观的。

注 1：零点定理可以扩充为：若有不同的两点 $x_1,x_2\in[a,b]$ $(x_1<x_2)$ 使得 $f(x_1)f(x_2)<0$，则（至少）存在 $x_0\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(x_0)=0$。

注 2：零点定理给出了在闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个零点的充分条件。读者可以思考，$y=f(x)$ 满足什么条件时，在 $[a,b]$ 上至多有一个零点？又满足什么条件时，在 $[a,b]$ 上恰有一个零点？

定理 3.15 介值定理（零点定理推论）

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，若 $f(b)\neq f(a)$，则对介于 $f(b)$与$f(a)$ 之间的任意实数 A，都存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=A$。

例 2.6　证明介值定理。

【证】思路是创造应用零点定理的条件。**移项造辅助函数：**

令 $F(x)=f(x)-A$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，只需证明 $F(x)$ 至少有一个零点 $x_0\in(a,b)$。不妨假设 $f(b)>f(a)$，则 $f(b)>A>f(a)$，因此

$F(a)=f(a)-A<0$，且 $F(b)=f(b)-A>0$，

于是 $F(b)\cdot F(a)<0$，由零点定理，$F(x)$ 至少有一个零点 $x_0\in(a,b)$，所以

$F(x_0)=f(x_0)-A=0$，即 $f(x_0)=A$。

例 2．7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

【解】该极限为“1^∞”型，应考虑应用标准极限(4.15)。将已知极限表达式凑成标准型。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}}$$，注意到

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}=e$$，由复合极限定理，只需求如下极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{6}x^3)=-\frac{1}{3},$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{-\frac{1}{3}}$。

注：上述解法中用到了等价无穷小量(3.13)。

上述结论可用洛比达法则或泰勒公式证明。另外，本题亦可考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$，对指数部分直接用洛比达法则求极限。

例 2．8 求下列极限： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}=-1$

【解】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-2}=-1$。

注：$\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ 含有无穷间断点 $x=1$，经过分解因式，消去因子 $x-1$ 之后的函数在 $x=1$ 处连续，极限计算变成了简单的函数值计算。

例 2．9 讨论下列函数 $f(x)$ 的连续性，若有可去间断点，将函数修正为连续函数。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x<0\end{cases}$$

【解】这一分段函数各段表达式在给定的区间内均为初等函数，$f(x)$ 有唯一的间断点 $x=0$， 并且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2},$$

因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，若改变 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的定义为 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续。

例 2.10 （2004-04-01）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$______ 。 $b=$______ 。

【解】本题属于已知极限求参数的问题。

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，

由无穷小量比阶概念应有 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，得 $a=1$。 原极限化为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5$，得 $b=-4$。

因此 $a=1, b=-4$

注：（1）已知 $\lim\limits_{x\to\to(.)}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$ 或 ∞，则或同时有 $g(x)\to 0$ 与 $f(x)\to 0$，或 $g(x)$ 与 $f(x)$ 都不为无穷小量。

（2）若 $A=0$，则由 $g(x)\to 0$ 可推断 $f(x)\to 0$，若 $A=\infty$，则由 $f(x)\to 0$ 可推断 $g(x)\to 0$。

例 2.11 考察函数 $y=e^{1-\cos\frac{1}{x}}$ 的连续性。

【解】这是一个复合函数，$\boldsymbol{y=e^u}$ 处处连续，而 $\boldsymbol{u=1-\cos\frac{1}{x}}$ 有第二类间断点 $\boldsymbol{x=0}$，于是函数 $y=e^{1-\cos\frac{1}{x}}$ 除去点 $\boldsymbol{x=0}$ 外处处连续（$\boldsymbol{x=0}$ 为第二类间断点，属于振荡形间断点。）

例 2.12 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-\cos\frac{1}{n}}-e^{-1}}{\tan(n^{-k}\pi)}=a\neq 0$，则（ A ）。

（A）$k=2$ 且 $a=\dfrac{e^{-1}}{2\pi}$；　　（B）$k=-2$ 且 $a=\dfrac{e^{-1}}{2\pi}$；

（C）$k=2$ 且 $a=-\dfrac{e^{-1}}{2\pi}$；　　（D）$k=-2$ 且 $a=-\dfrac{e^{-1}}{2\pi}$；

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-\cos\frac{1}{n}}-e^{-1}}{\tan(n^{-k}\pi)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-1}(e^{1-\cos\frac{1}{n}}-1)}{\tan(n^{-k}\pi)}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-1}\dfrac{1}{2n^2}}{n^{-k}\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{-1}\pi}{n^{2-k}\pi}=a\neq 0$，

则必有 $k=2$，$a=\dfrac{e^{-1}}{2\pi}$，答案为(A)。延伸：可以是变限积分表示的无穷小量比阶问题。

例 2.13 设 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有间断点，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，则______

（A）$f(\varphi(x))$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有间断点；（B）$\varphi(f(x))$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有间断点；

（C）$\varphi^2(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有间断点；（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有间断点.

【解】答案为(D)。取 $f(x)=x^2,\phi(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$，则(A)不对，(C)亦不对。

取 $f(x)=2+\sin x$，$\phi(x)=\dfrac{1}{2-x}$，则 $\phi(f(x))=\dfrac{1}{4-\sin x}$ 无间断点，因此(B)不对。

注： 从函数概念来考虑，复合函数可将作为中间变量的函数的间断点修正为连续点，由此可断定(A)不对。对(B)，$f(x)$ 的值域未必包含 $\phi(x)$ 的间断点。

例 2.14　设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ B　）。

(A)可去间断点。(B)跳跃间断点。(C) 无穷间断点。(D) 震荡间断点。

【解】$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{3+2e^{-\frac{2}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{1}{2}$，因此答案为(B)。

例 2.15 设 $a,b\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax+\sin bx)^{\cot x}$

【解】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax+\sin bx)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\cot x}\left(1+\dfrac{\sin bx}{\cos ax}\right)^{\cot x}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos ax-1)^{\frac{1}{\cos ax-1}(\cos ax-1)\cot x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin bx}{\cos ax}\right)^{\frac{\cos ax}{\sin bx}\cdot\left(\frac{\sin bx}{\cos ax}\frac{\cos x}{\sin x}\right)}$$

$=e^0\cdot e^b=e^b$。

例 2.16　设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in[\dfrac{1}{2},1)$，试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上连续。

【解】由于 $x=1$ 为间断点，取变换 $y=1-x$，则

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi^2y^2}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi y}{2\pi^2 y}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to 0^+}\frac{\pi\cdot\frac{1}{2}\pi^2y^2}{2\pi^2 y}=\frac{1}{\pi}$$

只需定义 $f(1)=\dfrac{1}{\pi}$。

例 2.17 证明：若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在，则 $y=f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界。

【证】由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在，则 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时有界，即存在 $M_1>0$ 及某个 $X>0$，使当 $x>X$ 时有 $|f(x)|\le M_1$，显然函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,X]$ 上连续，因此函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,X]$ 上有界，即存在 $M_2>0$，使 $\forall x\in[a,X]$ 都有 $|f(x)|\le M_2$。令 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则 $\forall x\in[a,+\infty)$ 必有 $|f(x)|\le M$，这说明 $y=f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界。

例 2.18 证明：若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $a<f(x)<b$，则存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=x_0$。（该命题称为连续函数的**不动点定理**）

【证】该命题要证方程 $x=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有实根。引入辅助函数 $F(x)=x-f(x)$，则只需证明函数 $F(x)=x-f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点，由 $F(a)=a-f(a)<0$ 及 $F(b)=b-f(b)>0$，在区间 $[a,b]$ 上应用零点定理，可知函数 $F(x)=x-f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点。即存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $F(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=x_0$。

例 2.19 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 存在，若 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可取到正值，证明函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必有正的最大值。

【证】由于 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可取到正值，则至少有一点 $x_1\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f(x_1)>0$，又因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，则对 $\varepsilon=f(x_1)>0$，$\exists X>|x_1|\ge 0$，使当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|<f(x_1)$．另一方面当 $x\in[-X,X]$，由于 $f(x)$ 连续，必有 $x_m\in[-X,X]$，使 $f(x_m)$ 为 $[-X,X]$ 上的最大值，且 $x_1\in[-X,X]$，所以 $f(x_m)\ge f(x_1)>0$。

例 2.20 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且满足 $f(0)=f(2a)\ne f(a)$，试证明存在 $x_0\in(0,a)$，使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

【证】考虑辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续，并且

$$F(0)=f(0)-f(a)\ne 0,\quad F(a)=f(a)-f(2a)\ne 0,$$

$F(0)+F(a)=f(0)-f(2a)=0$，因此必有 $F(a)=-F(0)$，由连续函数的零点定理，

存在 $x_0\in(0,a)$，使得 $F(x_0)=0$ ，即 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

方法点评：移项取辅助函数，讨论零点问题，增减性问题或最大最小值问题，是证明等式与不等式的常用方法.

例 2.21 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，在 $x=1$ 处连续，并且满足 $f(x)=f(\sqrt{x})$，试证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒为常数。

【解】 由归纳法可有 $f(x)=f(\sqrt{x})=f\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$，

对 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$，令 $n\to\infty$，$\forall x\in(0,+\infty)$，由复合极限定理得到

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)=C$。

例 2.22 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}+ax^2+bx}{x^{2n+2}+1}$，问 a,b 为何值时 $f(x)$ 连续。

【解】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}+ax^2+bx}{x^{2n+2}+1}=\begin{cases}ax^2+b, & |x|<1\\ (a+1\pm b)/2, & x=\pm1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+2b=a+b+1\\ 2a+2b=a-b+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a+3b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

例 2.23 若 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，研究其连续性。

【解】 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin x+\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

$$=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

$x=0$ 为可去间断点，$x=k\pi,k=\pm1,\pm2,\cdots$ 为无穷间断点。

例 2.24 设 $f\in C[0,1]$，$f(0)=f(1)$，证明：

(1) 存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{2}\right)$；

(2) $\forall n \in N$，存在 $\xi \in [0,1]$ 使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$.

【证】(1) 移项造辅助函数 $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$， $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续。

$F(0) = f(0) - f(\frac{1}{2})$， $F(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1)$， $F(0) + F(\frac{1}{2}) = f(0) - f(1) = 0$，

于是，或者 $F(0), F(\frac{1}{2})$ 同为零，此时存在 $\xi = 0 \in [0,1]$ 使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$。

或者 $F(0), F(\frac{1}{2})$ 互为异号，此时存在 $\xi \in (0,\frac{1}{2}) \subset [0,1]$，使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$。

(2) 设 $F(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ ，有

$F(0) = f(0) - f(\frac{1}{n})$，

$F(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n})$，

……，

$F(\frac{n-1}{n}) = f(\frac{n-1}{n}) - f(1)$。

将上述 n 个等式两边分别相加得到

$F(0) + F(\frac{1}{n}) + 6\ + F(\frac{n-1}{n}) = 0$

上述结果说明，或是 $F(0), F(\frac{1}{n}), 6\ , F(\frac{n-1}{n})$ 同时为零，或是其中至少有两个，

比如， $F(\frac{i}{n}), F(\frac{k}{n})$ （$\mid i,k = 0,1,2,6\ , n-1, i \neq k$）互为异号。

以上两种情况都意味着 $\exists \xi \in [0,1]$，使得 $F(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n})$。

例 2.25 设 $f \in C(a,b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$， 证明：存在 $\alpha, \beta \in (a,b)$ 使得 $f(\alpha) = f(\beta)$。

【证】首先有 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) > 0$，对 $G = f(x_0) > 0$ 存在 $x_1 \in (a, x_0)$ 使当 $x \in (a, x_1)$ 时有 $f(x) > f(x_0) > 0$，且存在 $x_2 \in (x_0, b)$ 使当 $x \in (x_2, b)$ 时有 $f(x) > f(x_0) > 0$，考虑 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续，存在 $x_m \in [x_1, x_2]$ 使得 $f(x_m) = \min\limits_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \le f(x_0)$，因此 $f(x_m) = \min\limits_{x\in(a,b)} f(x)$。

移项造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(\alpha)$. 其中 α 为 (a,b) 内任意一点。

$F(x_m)=f(x_m)-f(\alpha)<0$，由于 $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)-f(\alpha)=+\infty$，

至少存在 $x_n\in(x_m,b)$ 使得 $F(x_n)>0$。

由连续函数的零点定理，存在 $\beta\in(x_m,x_n)\subset(a,b)$ 使得 $F(\beta)=0$，即 $f(\alpha)=f(\beta)$。

2. 26 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}, & x\neq 0,\text{且}x\neq 1\\ 0, & x=0\text{或}1\end{cases}$，则（　B　）。

（A）$x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的可去间断点（第一类间断点）。

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点；$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，但不为可去间断点。

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点；$x=1$ 是 $f(x)$ 的去间断点。

（D）$x=0$，$x=1$ 均为 $f(x)$ 的第一类间断点。

【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$。