基础班微积分辅导第 9 章

常微分方程 (一)

9.1 微分方程的基本概念

9.1.1 引言

定义9.1 包含未知函数的导数或微分的方程式就称为**微分方程**.

- 微分方程是用函数与导数的关系式来表达(一类)函数的一种方法。

定义9.2 如果未知函数为一元函数，则该微分方程称为**常微分方程**。

- **微分方程的基本问题**：列方程；解方程；解的定性研究。
- **微分方程的基本研究方法**

9.1.2 **微分方程的分类：**

定义9.3 方程中出现的最高阶导数的阶数称为这个微分方程的**阶**.

- n阶常微分方程的一般形式为 $y^{(n)} = f(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$

定义9.4 如果在上述方程中，函数 f 关于未知函数 y 及其各阶导数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ 都是一次整式，则称这个方程是**线性微分方程**，否则称为**非线性微分方程**.

- n阶线性常微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),$$

其中 $a_i(x), (i = 0,1,\ldots,n-1), f(x)$ 是已知函数.

- $f(x) \equiv 0$，微分方程称为n阶齐次线性常微分方程。
- 否则微分方程称为n阶非齐次线性常微分方程。

9.1.3 **“解”的概念**

定义9.5 满足微分方程的函数，称为该方程的**解**。即将此函数代入方程，使其成为恒等式。

更细致一点，如果函数 $y = y(x)$ 在区间 I 上具有 n 阶导数，且将其代入某 n 阶微分方程之后，使之成为恒等式，则称函数 $y = y(x)$ 是方程在区 I 上的一个解

定义9.6 微分方程的解中都包含了若干任意常数. 一般情况下，在n阶微分方程的解中含有n个独立的任常数$c_1, c_2, \ldots, c_n$，n阶微分方程的解的表达式为

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

称为微分方程的**通解**（**一般解**）.

定义9.7　一个微分方程虽然可以有无穷多个解，若从中确一个所需要的解. 则需要对微分方程附加某些条件, 即所谓**定解条件**. 适合定解条件的解称为微分方程的**特解**.

● 对于n阶微分方程, 为了从通解中找到所需要的解, 需要附加n个初始值条件, 即

$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,\dfrac{dy}{dx},\ldots,\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})=0 \\ y(x_0)=y_0\ ,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1} \end{cases}$$

这样的定解条件称为**初值条件**, 上述问题就称为**初值问题**.

例 9.1　三个函数 $y_1(x)=C_1e^{-x^2}+1$，$y_2(x)=C_2$，$y_3(x)=y_1(x)+y_2(x)$，$y_4(x)=y_1(x)+y_2(x)-x$，其中C_1,C_2为任意常数，是否是下列四个方程之解，若是解，是什么解？

(1)　$y'=2x(1-y)$；　(2)　$xy''-(1-2x^2)y'=0$；　(3)　$xy''-(1-2x^2)y'=1-2x^2$.

【解】根据解的概念，直接代入验证可知：$y_1(x)$是方程(1)的通解；当$C_2=1$时，$y_2(x)$是方程(2)的一个特解；$y_1(x)$和$y_2(x)$都是方程(2)的解，$y_3(x)$是方程(2)的通解；$y_4(x)$是方程(3)的通解.

例 9.2　设$y_1=e^{-x}$，$y_2=2x$是三阶线性齐次常系数常微分方程 $y'''+ay''+by'+cy=0$的两个解, 则a,b,c的值分别为（　　）.

A.　$a=2,b=1,c=0$；　　B.　$a=1,b=0,c=0$；

C.　$a=1,b=0,c=1$；　　D.　$a=-1,b=0,c=0$.

【解】$y_1=e^{-x}$是解：$-1+a-b+c=0$，$y_2=2x$是解：$2b+2cx=0$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，可得到$b=0,c=0$。由前者得：$a=1$。答案：B

例 9.3　已知$y=\dfrac{x}{\ln x}$是方程$y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$之解，则$\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$的表达式为(　A　)

(A) $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；　(B) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；　(C) $-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$；　(D) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$.

例 **9.4**　（**04_1**）已知$f'(e^x)=xe^{-x}$，且$f(1)=0$，则$f(x)=$ $\underline{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2}$.

例 9.5　已知函数$y=y(x)$满足条件$\begin{cases} xy''+3xy'^2=1-e^x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

问A满足什么条件时可$\forall x\geq 0$有（$x>0$）？答案：只要$A\geq\dfrac{1}{2}$即有（$x>0$）。

例 9.6　通过方程的通解也可以求方程：设 $y(x)=c_1e^{-x^2}+c_2$ 是某个方程的解，求方程的形式．答案：$xy''-(1-x^2)y'=0$

例 9.7　试研究 $\begin{cases} y'=x^3+xy^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 之解所确定函数的增减区间，极值点及凸凹区间。

【解】$\Rightarrow \begin{cases} y\uparrow, if\ x\ge 0 \\ y\downarrow, if\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in R} y(x)=y(0)=0 \\ y(x)\ge 0, \forall x\in R \end{cases}$；$\Rightarrow$ 是下凸的函数。

9.2 常见的一阶微分方程的求解方法及一阶可积微分方程的类型

9.2.1 分离变量法

- 方程：形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$，或者 $u(x)dx=v(y)dy$ 的方程称为**变量分离方程**.
- 解法：分离变量后，两边积分：

$$u(x)dx=v(y)dy \Rightarrow \int u(x)dx=\int v(y)dy+C$$

- 初值问题的求解：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(x)dx=\int_{y_0}^{y}\dfrac{dy}{g(y)}$.

例 9.8　$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}, \\ y(x_0)=y_0, \end{cases}$ $(x_0y_0\ne 0)\Rightarrow \begin{cases} ydy=-xdx \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$，答案：$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+C \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$

9.2.2 可化为可分离变量型的方程

- 齐次方程：$\dfrac{dy}{dx}=g(\dfrac{y}{x})$；解法：变量置换。令 $u(x)=\dfrac{y(x)}{x}\Rightarrow y'=xu'+u$，

  $\dfrac{dy}{dx}=g(\dfrac{y}{x})\Rightarrow xu'+u=g(u)\Rightarrow u'=\dfrac{g(u)-u}{x}$。

- 其他方程，如 $y'=f(ax+by)$，令 $u(x)=ax+by$．$y'=f\left(\dfrac{ax+by}{cx+dy}\right)$，齐次方程，

  令 $u=\dfrac{y}{x}$，$y'=f\left(\dfrac{ax+by+k}{cx+dy+l}\right)$ 变量代换 $x=\tilde{x}+x_0, y=\tilde{y}+y_0$，其中

  $\begin{cases} ax_0+by_0=k \\ cx_0+dy_0=l \end{cases}$，化成 $\tilde{y}'=f\left(\dfrac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{c\tilde{x}+d\tilde{y}}\right)$。

例 9.9　$xy'=y(\ln y-\ln x)$. $\Rightarrow y=xe^{1+Cx}$

例 9.10 解方程：$(y^2-3x^2)y'+3xy=0$．　答案 $ye^{\frac{3x^2}{2y^2}}=c$

9.2.3 一阶线性方程

一阶线性方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$

解法：（1）变易常数法：先解齐次方程，变易常数。

【解】为变量可分离型方程，其通解为 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$

方程$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$的通解为 $y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

（2）积分因子法：方程两边同乘积分因子函数 $e^{\int p(x)dx}$，

得到　　　　$y(x)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$。

定理 9.1 齐次一阶线性常微分方程的解集构成一维线性空间；

非齐次一阶线性常微分方程的通解=齐次一阶线性常微分方程的通解

+非齐次一阶线性常微分方程的某一特解

例 9.11 设函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是一阶线性常微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个不同**的解**，

则常微分方程的通解为 ________________。答案：$y=C(y_1-y_2)+y_1$

例 9.12 解方程$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$

答案：$y=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$.

例 9.13 （**05_3,4**）微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为 $\underline{\quad xy=2\quad}$。

一阶齐次线性方程初值问题求解；

全微分方程：$d(xy)=0,\quad xy=C$。代入初始条件，$C=2$。

例 9.14 （**04_2**）微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为

$\underline{\quad y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}\quad}$.

例 9.15 **(91)** 连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^{2x}f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$ 则 $f(x)$ 是(B)。

(A) $e^x\ln 2$　　(B) $e^{2x}\ln 2$　　(C) $e^x+\ln 2$　　(D) $e^{2x}+\ln 2$

9.2.4 贝努利方程

- 方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$

$n=0$：一阶线性方程；$n=1$：可分离变量方程。$n\neq 0\ or\ 1$：**贝努利方程。**

- 解法： 用 y^n 除以方程两端将其化为，$\dfrac{du}{dx}+(n-1)p(x)u=(1-n)q(x)$

  这显然是关于 y^{1-n} 的一个一阶线性方程.

例 9.16 解方程 $x^2y'+xy=y^2$. 答案：即 $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{2x^2}+C$ 。

9.2.5 可凑成微分形式的方程，积分因子

第一，能凑全微分的部分先凑好；主要公式是

$$udv+vdu=d(uv),\quad \frac{udv-vdu}{u^2}=d\left(\frac{v}{u}\right)$$

第二，剩下部分利用已知的积分因子来试：这些已有的是

$udv-vdu=0$ 的五个积分因子：

$$\frac{1}{u^2}:\frac{udv-vdu}{u^2}=d\left(\frac{v}{u}\right);\quad \frac{1}{v^2}:\frac{udv-vdu}{v^2}=d\left(-\frac{u}{v}\right);\quad \frac{1}{uv}:\frac{udv-vdu}{uv}=d\left(\ln\frac{v}{u}\right);$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}:\ \frac{udv-vdu}{u^2+v^2}=\frac{\dfrac{udv-vdu}{u^2}}{1+\dfrac{v^2}{u^2}}=\frac{d\left(\dfrac{v}{u}\right)}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=d\left(arctg\frac{v}{u}\right);$$

$$\frac{1}{u^2-v^2}:\frac{udv-vdu}{u^2-v^2}=\frac{\dfrac{udv-vdu}{u^2}}{1-\dfrac{v^2}{u^2}}=\frac{d\left(\dfrac{v}{u}\right)}{1-\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}=d\left(\ln\left|\frac{u+v}{u-v}\right|\right);$$

例 9.17 解方程 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$

例 9.18 解方程 $y\,dx+(x-3x^3y^2)dy=0$.

答案：方程的通解为 $\dfrac{1}{2(xy)^2}+3\ln y=c$.

9.3 高阶可降阶类型方程的求解

一般情况下，求解高阶方程更加困难. 处理高阶方程的思路之一是设法降低方程的阶. 在这里，仅对二阶方程 $y''=f(x,y,y')$ 的几种右端函数缺变量的情形进行讨论.

9.3.1 方程不显含 y,y'（导数已解出）$y^{(n)}=f(x)$

例 **9.19** 解方程 $y^{(4)}=\sin x+x$.

【解】 $y=\sin x+\frac{x^5}{5!}+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$

9.3.2 不显含 y 的方程， $y''=f(x,y')$ 或 $F(x,y',y'')=0$

令 $p(x)=y'$， $y''=p'(x)$，方程变成： $p'=f(x,p)$，这是一阶方程，有可能求解。

例 9.20 解方程 $xy''=y'\ln y'$.

【解】令 $p(x)=y'$， $y=\int pdx=\frac{1}{c_1}e^{c_1x}+c_2$.

9.3.3 方程不显含 x， $y''=f(y,y')$ 或 $F(y,y',y'')=0$

令 $p=p(y)=\frac{dy}{dx}$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，

代入方程得 $p\frac{dp}{dy}=f(p,y)$. 得到一个关于未知函数 p 和自变量 y 的一阶方程.

例 9.21 解方程 $y''=\frac{1+(y')^2}{2y}$.

答案：$\pm\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2$，化简得 $\frac{4}{c_1^2}(c_1y-1)=(x+c_2)^2$。

例 9.22 求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\frac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\frac{dy}{dx})^2=\frac{dy}{dx}\\ y(-1)=\frac{\pi}{6},\ y'(-1)=\frac{1}{2}\end{cases}$

【解】定解问题之解为 $\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$。

9.4 应用问题举例

（一）**微分方程应用的基本方法：**

规律翻译法和微量分析法。

（二）**微分方程应用的基本步骤：**

列方程；解方程；解的分析。

（三）**微分方程应用题的基本范围.**

例 9.23 求曲线 $y=y(x)$，使其上每点 $M(x,y)$ 的法线平分过这点的水平线与矢径所交之角。

答案：$\Rightarrow y^2 = 2cx + c^2$， 这是抛物线。

例 9.24 将质量为 m 的物体，以初速 v_0 垂直向上射出，设空气阻力与运动速度的平方成正比，比例系数 $k > 0$。求物体到达的高度，到这最高处的时间，落到原地时的速度及下落时间？

【解】取向上为高度正方向的坐标系，则有方程及条件：

上升方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv^2 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$；下落方程及条件 $\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg + kv^2 \\ v(t^*) = 0 \end{cases}$。

例 9.25 一容器总高为 H，在高度为 h 处的断面面积为 $S = S(h)$，在底部有一面积为 s_0 的小

孔，若水流出速度 v 是水深 h 的函数，$v = \mu\sqrt{2gh}$，

若在容器装满水后，将底部小孔打开，问多久水将流

尽？

答案：$\dfrac{-S(y)dy}{\sqrt{y}} = \mu\sqrt{2g}\,dt$，$\displaystyle\int_h^y \frac{-S(y)}{\sqrt{y}}dy = \int_0^t \mu\sqrt{2g}\,dt$，$t = \dfrac{1}{\mu\sqrt{2g}}\displaystyle\int_y^h \frac{S(y)}{\sqrt{y}}dy$。

例 9.26 某湖泊水量为 V，每年入湖含污物 A 的污水，入湖污水量 $\dfrac{V}{6}$，入湖不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出量 $\dfrac{V}{3}$。已知 1999 年底湖中有污物 $5m_0$，超过国家标准。为治污从 2000 年初开始，限定入湖污水含 A 浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$，问多少年后湖中含污物的量降至 m_0。

答案：$m = m_0, t = 6\ln 3$。

例 9.27 设曲线 L 位于 Oxy 平面的第一象限内并经过点 $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$。$L$ 上任一点 M 的切线与 y 轴交于 A 点，已知切点 M 到 A 点的距离等于原点到 A 的距离，求曲线的方程。

答案：$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} \\ y\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$，为齐次方程。

9.5 综合例题

例 9.28 设 $p(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续非负, 如果微分方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$, 则 $p(x)$ 必然满足（ D ）。

$A.\ \lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=0$　　$B.\ \lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$　　$C.\ \int_a^{+\infty} p(x)dx$ 收敛　　$D.\ \int_a^{+\infty} p(x)dx$ 发散

例 9.29 已知一阶线性方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 的两个不同解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 则该方程的通解为（ B ）。

$A.\ c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$　　　$B.\ c_1y_1(x)+c_2[y_2(x)-y_1(x)]$

$C.\ y_1(x)+c[y_2(x)-y_1(x)]$　　　$C.\ y_2(x)+c[y_2(x)+y_1(x)]$

例 9.30 求解一阶初值问题：$\begin{cases}(y-\frac{1}{x})dx+\frac{1}{y}dy=0\\ y|_{x=1}=2\end{cases}$

答案：$y=\frac{2}{x}$。

例 9.31 若方程 $y'+p(x)y=0$ 的一个特解为 $y=\cos 2x$, 则该方程满足初值条件 $y(0)=2$ 的特解为（ D ）

$A.\ \cos 2x+2$　　$B.\ \cos 2x+1$　　$C.\ 2\cos x$　　$D.\ 2\cos 2x$

例 9.32 设 $p(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且不恒等于零， $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解, 则下列结论中错误的是（ C ）

$A.\ \frac{y_2(x)}{y_1(x)}\equiv$ 常数；(假设其中 $y_1(x)\neq 0$)；　　$B.\ c(y_1-y_2)$ 构成方程的通解；

$C.\ y_1-y_2=$ 常数；　　　$D.\ y_1(x)-y_2(x)$ 在任何一点不等于零 .

例 9.33 解方程 $2xdy-ydx=2y^2dy$. $\Rightarrow y=Ce^{-\frac{x}{2y^2}}$.

例 9.34 求曲线方程，在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长，如果曲线：　(1) 向下凸；　2) 向上凸.

【解】（1） $y=\frac{1}{2c}\left(e^{(x-c_1)}+e^{-(x-c_1)}\right)=\frac{1}{c}sh(x-c_1)$

（2）　$(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$。

例 9.35 求方程 $y''+2x(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{2}$ 的解。

【解】 $y=1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x}\right)$。

例 9.36 与曲线族 $y=ax^3$， $a\in R$ 正交的曲线是__________________.

【解】曲线族 $y=ax^3$， $a\in R$，满足的方程是： $y'=3ax^2$， $\dfrac{y}{x}=ax^2$， $y'=\dfrac{3y}{x}$.

其正交的曲线为 $y'=-\dfrac{x}{3y}$， 其通解为 $x^2+3y^2=C$。

例 9.37 质量为 m 一辆汽车在公路上高速行驶，遇情况急刹车，此时速度达 v_0，刹车后滑行距离 s_0 后终于停下。假设：刹车后滑行阻力 f 为常数，空气阻力与速度的平方成正比，比例系数为 c。试求 $f=?$

【解】

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2}=-f-c\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \\ s(0)=0 \\ \dfrac{ds}{dt}(0)=v_0 \end{cases} \qquad \left(f=\dfrac{cv_0^2}{e^{\frac{2c}{m}s_0}+1} \right)$$

例 9.38 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若曲线 $y=f(x)$， 直线 $x=1, x=t \quad (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转的体积为 $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right]$， 求 $y=f(x)$ 满足的微分方程，并求该方程满足初始条件 $y(2)=\dfrac{2}{9}$ 的解.

【解】 $y-x=-x^3y$。

例 9.39 曲线 $y=y(x)$ 通过原点并在第一、四象限，过曲线上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 y 轴的垂线，这二直线分别与 y 轴交于 T 点和 Q 点．则三角形 PQT 的面积与曲线在区间 $[0,x]$ 上的曲边三角形面积相等。求其曲线的方程.

【解】 $y=cx$。

例 9.40 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，$f'(1)=2$，且 $\forall x,y>0, f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 成立，求 $f(x)$。

答案：（ $f(x)=2x\ln x$ ）。

基础班微积分辅导第 10 章

常微分方程（二）——　高阶线性方程

线性方程解的结构；高阶线性常系数齐次方程的解；

高阶线性常系数非齐次方程的解；Euler 方程；差分方程介绍;综合例题

10.1 高阶线性方程及其解的结构

10.1.1 高阶线性方程及其特点

- n阶线性微分方程的一般形式为$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=f(t)$

其中$a_i(t)(i=1,2,\ldots,n)$以及$f(t)$都是区间I上的已知连续函数. 当$f(t)\equiv 0$时, 上述方程称为齐次方程: $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$

- 对于n阶线性微分方程解的存在唯一性定理:

定理 10.1: 设方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=f(t)$中的系数$a_i(t)(i=1,2,\ldots,n)$以及非齐次项$f(t)$都是区间$I$上的已知连续函数，$t_0\in I$，则对于任意一组实数$\xi_0,\xi_1,..,\xi_{n-1}$，方程满初值条件：　$x(t_0)=\xi_0,x'(t_0)=\xi_1,\ldots,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1}$

的解在区间I上存在唯一.

例10.1　判断下列方程中哪些是线性方程,

（i）$y''+xy'+2y=\sin x$ ；（ii）$y''+xy'+2y=\sin y$

（iii）$y''+x^2y'=|1-x|y$ ；（iv）$y''+x^2y'=|1-x|\sqrt{y}$

10.1.2 线性方程解的结构

(1) 函数的线性相关性：

定义 10.1： 在区间(a,b)上的n个函数$x_i(t), i=1,\cdots,n$线性相关，是指存在n个不全为零的常数$c_i, i=1,\cdots,n$，使得$\forall x\in(a,b), \sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)=0$；否则称$x_i(t), i=1,\cdots,n$为线性无关.

例如: 设$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in R$互不相等，则函数$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\ldots,e^{\lambda_m t}$在任意区间$I$上线性无关.

(2) 线性方程解的结构

定理 10.2 若$x_1(t),x_2(t)$都是方程　$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$

的解, 则对任意常数c_1,c_2, 函数$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是该方程的解.

证明：只要利用微分方程的线性性即可。

定理 10.3 方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$的所有解构成一个$n$维线性空间，其中任意$n$个线性无关的解，$x_i(t), i=1,\cdots,n$，构成该空间的一组基。

定理 10.4　非齐次方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=f(t)$

任意两个解之差是齐次方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+....+a_n(t)x=0$

的解；因此，如果已知方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+\ldots+a_n(t)x=f(t)$有一个特解$X(t)$，那么它的每个解都可以表示为 $x(t)=X(t)+\bar{x}(t)$，其中 $\bar{x}(t)$ 是齐次方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+\ldots+a_n(t)x=0$的一般解.

例10.2　$p(x),q(x)$和$f(x)$是连续函数，且线性无关的三个函数y_1,y_2,y_3都是二阶线性非齐次方程之解，c_1和c_2是任意常数，则其通解是：（D）

(A)　$c_1y_1+c_2y_2+y_3$；　　(B)　$c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$；

(C)　$c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$；　(D)　$c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$

- **非齐次线性常微分方程两个解的差为齐次线性常微分方程的解**
- **非齐次方程的通解＝齐次方程的通解加非齐次方程的特解**

例10.3　（01）设$y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$，（$c_i,i=1,2$为任意常数），为某二阶常系数齐次微分方程的通解，则该方程为（　$y''-2y'+2y=0$　）

求方程　$x''+\omega^2x=a$　之通解。　答案：$y(t)=\frac{a}{\omega^2}+c_1\sin\omega t+c_2\cos\omega t$.

(3) 线性方程求解的基本方法：观察待定法。

设有二阶齐次方程：$L(D)y=y''+p(x)y'+q(x)y=0$，

- 若已知二阶齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的一个特解$y_1(x)$，用**变动任意常数法,**

设$y_2(x)=c(x)y_1(x)$，代入方程 可求出$c(x)$，进而得到另一个无关特解。

- 若已知二阶齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的二个无关特解，$y_1(x),y_2(x)$，用**变动任意常数法**，设$Y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$，代入方程，可求出非齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的一个特解。

例10.4　$xy''+xy'-y=0$，　　$y=c_1x+c_2x(x^2+2x+2)e^{-x}$

例10.5　解方程$(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$。答案　$y=c_1x+c_2(1+x^2)$

例10.6　解方程$(1-x^2)y''+2xy'-2y=1-x^2$。

答案$Y=\frac{x}{2}\ln(1-x^2)+(x^2+1)\left[\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{x^2}{2}\right]$.

10.2 高阶线性常系数齐次方程的解

考察n阶线性常系数齐次方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+\ldots.+a_n x=0$

其中$a_1,\ldots,a_n$为实常数. 或记成　$L(D)x=0$

- 由上一段的讨论知道，方程$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+\ldots.+a_n x=0$在区间$(-\infty,+\infty)$有$n$个线性无关解，通解是这些解的线性组合。

10.2.1 特征方程：

(1) 若 $L(D)x=0$ 有形如 $y=e^{\lambda t}$ 的解，则 λ 必须是代数方程

$$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

之根。称为微分方程 $L(D)x=0$ 的**特征方程**. 特征方程的根称为**特征根**.

(2) 特征根与方程 $L(D)x=0$ 解的对应关系.

先以二阶为例说明结果： 微分方程：$L_2(D)x=y''+ay'+by=0$

特征方程：$L_2(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$

1) λ_1,λ_2 是方程 $L_2(\lambda)=0$ 的不等实根，则 $e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t}$ 是方程 $L_2(D)x=0$ 的两个无关解.

2) $\lambda_1=\lambda_2$ 是方程 $L_2(\lambda)=0$ 的重根；则 $e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t}$ 是方程 $L_2(D)x=0$ 的两个无关解.

3) $\lambda=\alpha\pm i\beta$ 是特征方程 $L_2(\lambda)=0$ 的一对共轭复根，则 $e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t$ 是方程 $L_2(D)x=0$ 的两个无关解.　其中用到结果：

- 设$z(t)=u(t)+iv(t)$，定义它的导数为 $\frac{dz}{dt}=\frac{du}{dt}+i\frac{dv}{dt}$.

如果复值函数 $z(t)=u(t)+iv(t)$是齐次方程 $L(D)x=0$ 的解，则实部$u(t)$和虚部$v(t)$都是 $L(D)x=0$ 的实解.

- 欧拉公式：$e^{\lambda t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$

10.2.2 n阶方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+\ldots.+a_n x=0$特征特征根与解的对应：

对n阶方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+\ldots.+a_n x=0$

1) 设 λ 是特征方程 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 的实根，则 $e^{\lambda t}$ 是方程

$\frac{d^n x}{d t^n}+a_1\frac{d^{n-1} x}{d t^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d\ x}{d t}+\ldots.+a_n x=0$的实解.

2）设$\alpha\pm i\beta$是特征方程的一对单重复根,

则$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$是方程$\frac{d^n x}{d t^n}+a_1\frac{d^{n-1} x}{d t^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d\ x}{d t}+\ldots.+a_n x=0$的两个无关实解.

3）设λ是特征方程的 $k(1<k\le n)$重实根,

则$e^{\lambda t}, te^{\lambda t},\ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$是方程$\frac{d^n x}{d t^n}+a_1\frac{d^{n-1} x}{d t^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d\ x}{d t}+\ldots.+a_n x=0$的$k$个无关实解.

4）设$\alpha\pm i\beta$ 是特征方程的一对 $k(1<2k\le n)$ 重复根，则

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t,\cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

是方程$\frac{d^n x}{d t^n}+a_1\frac{d^{n-1} x}{d t^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d\ x}{d t}+\ldots.+a_n x=0$的 $2k$个无关实解.

由此可知：对应特征方程$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_n=0$的$n$个根，包括重根，均能得到方程$\frac{d^n x}{d t^n}+a_1\frac{d^{n-1} x}{d t^{n-1}}+a_{n-1}\frac{d\ x}{d t}+\ldots.+a_n x=0$的$n$个线性无关解.

例10.7　具有特解$e^{-x}, 2xe^{-x}, 3e^x$的三阶线性常系数齐次方程是：（ B ）

(A)　$y'''-y''-y'+y=0$；　　(B)　$y'''+y''-y'-y=0$

(C)　$y'''-6y''+11y'-6y=0$；　　(D)　$y'''-2y''-y'+2y=0$

【解】特征方程为$(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$.

例10.8　(93) $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 有一特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，求α,β,γ及通解。

征值为2,1，特征方程$(\lambda-1)(\lambda-2)=0$，$\alpha=-3$，$\beta=2$，$\gamma=-1$。

例10.9　设μ为实数，求方程$x''+\mu x=0$的通解.

【解】　1）. $\mu>0$,　通解为　$x(t)=c_1\cos\sqrt{\mu}t+c_2\sin\sqrt{\mu}t,(c_1,c_2\in R)$.

2.　$\mu=0$, 为$x(t)=c_1+c_2t$.

3.　$\mu<0$, 方程通解为　$x(t)=c_1e^{\sqrt{-\mu}\ t}c_2e^{-\sqrt{-\mu}\ t}$.

例10.10 求方程$x^{(4)}-x=0$ 的通解．通解为 $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t$.

例10.11 求方程$x'''-3x''+3x-x=0$通解.

答案：$x(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^t$.

例10.12 求方程 $x^{(4)}+2x''+x=0$ 通解.

答案：$x(t)=(c_1+c_3t)\cos t+(c_2+c_4t)\sin t$.

10.3 高阶线性常系数非齐次方程的解

10.3.1 线性常系数非齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+\dots+a_n x=f(t)$$

其中$a_1,\dots,a_n$为实常数，$f(t)$是已知连续函数．方程可记成：$L_n(D)x=f(t)$.

若相应的齐次方程$L_n(D)x=0$ 的一般解是：$\bar{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t)$，因此, 如果又能够求得

$L_n(D)x=f(t)$的一个特解$Y(t)$，就能够写出其通解:

$$x(t)=\bar{x}(t)+Y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t)+Y(t)$$

一般情况下可以用常数变异法根据$L_n(D)x=0$的通解求出$L_n(D)x=f(t)$ 的一个特解.

10.3.2 $L_n(D)x=P(t)e^{\alpha t}$ 型方程的求解

对于 右端函数$f(t)$ 属于某些简单类型时, 可以用观察待定方法求非齐次的一个特解. 下面我们以二阶方程为例说明这种方法．对于高阶方程也可以类似地求解.

考察二解线性常系数方程　　$L_2(D)x=\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=f(t)$

假定右端函数具有形式　　$f(t)=P(t)e^{\alpha t}$，其中$P(t)$是t的一个多项式.

比较系数法的出发点是假定方程$L_2(D)x=P(t)e^{\alpha t}$有一个形如　$x(t)=Q(t)e^{\alpha t}$

的解，其中$Q(t)$是t的一个多项式．问题是如何确定$Q(t)$的次数和系数.

根据解的概念 ，将$x(t)=Q(t)e^{\alpha t}$ 代入方程$L_2(D)x=P(t)e^{\alpha t}$, 得

$$Q''(t)+(2\alpha+a)Q'(t)+(\alpha^2+a\alpha+b)Q(t)=P(t)\qquad (*)$$

下面分三种情形讨论.

（1）当α不是特征根时，　即 $\alpha^2+a\alpha+b\neq 0$（*）左端是 一个次数与$Q(t)$相同的多项式. 为了使(*)两端多项式次数相等，$Q(t)$ 应当是一个与$P(t)$次数相同的多项式.

(2)． 当α是特征根，但非重根时，　即 $\alpha^2+a\alpha+b=0$ ，$2\alpha+a\neq 0$，(*) 左端是 一个次数与$Q'(t)$相同的多项式．于是为了使(*) 两端多项式次数相等，$Q(t)$应当是一个比$P(t)$次数高一次的多项式．此时可以取　$Q(t)=tR(t)$，这里$R(t)$是一个次数与$P(t)$相同的多项式.

(3)． 当α是特征董根时，　即 $\alpha^2+a\alpha+b=0$ ，$2\alpha+a=0$，(*) 左端是 $Q''(t)$. 于是为了使(*) 两端多项式次数相等，$Q(t)$应当是一个比$P(t)$次数高二次的多项式.

此时可以取 $Q(t)=t^2R(t)$.

例10.13 (89)方程$y''-y=e^x+1$的一个特解应具有形式(a,b为常数)是 (B)

(A)$a\,e^x+b$；　(B)$a\,xe^x+b$；　(C)$a\,e^x+b\,x$；　(D)$a\,xe^x+b\,x$.

例10. 14 求方程$x''+x'=2t^2+1$的通解．通解为$x(t)=c_1+c_2e^{-t}+\dfrac{2}{3}t^3-2t^2+t$.

例10. 15 解方程$x''-2x'+x=4te^t$．通解为$x(t)=(c_1+c_2t)e^t+\dfrac{2}{3}t^3e^t$.

例10. 16 解方程　　$x''-x=4\cos t$。答案：$x=c_1e^t+c_2e^{-t}-2\cos t$.

例10. 17 求方程　$x''+\omega x=H\sin\beta t$，其中$H,\omega,\beta$为常数.

【解】此方程对应的齐次方程$x''+\omega^2x=0$的通解为 $x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$.

1. 若$\beta\neq\omega$，$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\dfrac{H}{\omega^2+\beta^2}\sin\beta t$.

2. 若$\beta=\omega$，则$i\beta$是特征根，并且是单重根，此时 ，从而方程通解是

$$x(t)=(c_1-\frac{H}{2\omega}t)\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

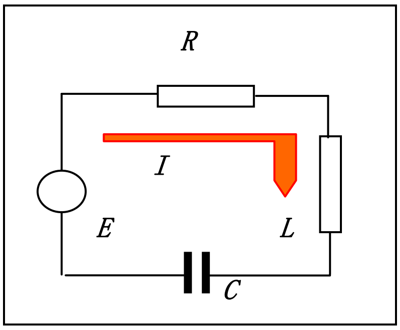
例10. 18 求方程$x''-x=t^2+1+te^{2t}$的一个特解.

【解】$y=y_1+y_2=:-t^2-2+(\dfrac{t}{3}-\dfrac{4}{9})e^{2t}$.

例10. 19（电路问题） $IR+L\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t I\,dt=E$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dE}{dt}$$

$$LC\frac{d^2I}{dt^2}+RC\frac{dI}{dt}+I=C\frac{dE}{dt}$$



这就是所谓的 R-L-C 电路方程.

10.4 Euler 方程

形如 $t^n\frac{d^nx}{dt^n}+a_1t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}t\frac{dx}{dt}+a_nx=0$

的方程称为 Euler(欧拉)方程. 其中 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 为常数. 对于这种方程, 应当分别考虑 $t>0$ 和 $t<0$ 的情形. 作代换 $s=\ln|t|$ 可以将上述方程化为未知函数 $x=x(s)$ 的常系数方程.

例10.20 解方程 $t^2\frac{d^2x}{dt^2}+2t\frac{dx}{dt}+2x=0$.

【解】$x(t)=|t|^{\frac{1}{2}}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|t|+c_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|t|)$.

10.5 差分方程介绍

（一）线性常系数差分方程　设未知数列 $y_n,n=0.1,2,\cdots$，则

（1）$a_ny_{n+1}+b_ny_n=f_n$，若 $f_n\neq 0$，称为一阶线性非齐次差分方程;

$a_ny_{n+1}+b_ny_n=0$，称为一阶线性齐次差分方程,

若 $a_n=a,b_n=b$ 为常数，则称为常系数满足方程.

（2）$a_ny_{n+2}+b_ny_{n+1}+c_n=f_n$，若 $f_n\neq 0$，称为二阶线性非齐次差分方程;

$a_ny_{n+2}+b_ny_{n+1}+c_n=0$，称为二阶线性齐次差分方程,

若 $a_n=a,b_n=b,c_n=c$ 为常数，则称为常系数满足方程.

差分方程初始值问题： $\begin{cases}a_ny_{n+1}+b_ny_n=f_n\\ y_0=\alpha\end{cases}$, $\begin{cases}a_ny_{n+2}+b_ny_{n+1}+c_n=f_n\\ y_0=\alpha,\ y_1=\beta\end{cases}$.

（3）差分方程的**解**：**使差分方程成为关于 n 的恒等式的数列** $y_n,n=0.1,2,\cdots$ 称为相应差分方程之**解**。与微分方程类似，也有通解特解之说。

特别是对线性差分之程，有完全类似于线性微分方程解的结构理论。

（二）一、二阶线性常系数齐次差分方程的解法

（1）一阶方程：$\begin{cases} y_{n+1}-py_n=0 \\ y_0=y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1}=py_n \\ y_0=y_0 \end{cases} \Rightarrow y_n=p^n y_0$.

（2）二阶方程：$\begin{cases} y_{n+2}+py_{n+1}+q=0 \\ y_0=y_0, y_1=y_1 \end{cases}$. 令 $y_k=\lambda^k$，代入方程，得特征方程:

$\lambda^2+p\lambda+q=0$，设有二根 λ_1,λ_2，则一般解：$y_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$.

例10.21 解差分方程 $\begin{cases} 2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0 \\ x_0=1/2, x_1=13/20 \end{cases}$.

【解】特征方程，$2\lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=1/2, \lambda_2=1$，则一般解：$y_n=c_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+c_2$，

由初始条件确定常数，得特解：$y_n=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

10.6 综合例题

例10.22 求定解问题 $\begin{cases} y''+4y'+4y=\cos 2x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ 的解。

【解】 $Y=-\dfrac{x}{4}e^{-2x}+\dfrac{1}{8}\sin 2x$。

例10.23 振荡问题讨论，质量为 m 的质点挂在在弹簧上，弹性力与位移成正比，比例系数为 $k>0$；力阻力与速度成正比，比例系数为 $\mu\ge 0$；所受外力为 $f(t)$，则运动满足微分方程及条件：$\begin{cases} m x''=-c x'-k x+f(t) \\ x(0)=x_0, x'(0)=v \end{cases}$，研究运动规律。

【解】为方便计，设 $\mu=\dfrac{c}{2m}$，$\omega^2=\dfrac{k}{m}$，$F(t)=\dfrac{1}{m}f(t)$，则有

原方程 $\Rightarrow \begin{cases} x''+2\mu x'+\omega^2 x=F(t) \\ x(0)=x_0, x'(0)=v \end{cases}$ (*)

特征方程：$\lambda^2+2\mu\lambda+\omega^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega^2}$. $\sqrt{|\mu^2-\omega^2|}=q$

（1） $\mu\ge\omega$, $\lambda_1=-\mu+q\le 0$, $\lambda_2=-\mu-q<0$；（2） $\mu<\omega$, $\lambda_1=-\mu\pm q\,i$.

例10.24 设 $y_1=3+x^2$, $y_2=3+x^2+e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解，且相应齐次方程的一个解为 $y_3=x$，则该微分方程的通解为 $\underline{y=3+x^2+C_1x+C_2e^{-x}}$。

例10.25 函数 $\boldsymbol{y=C_1e^x+C_2}$ 满足的一个二阶线性常系数齐次微分方程为：$\underline{y''-y'=0}$。

例10. 26 设二阶线性齐次常系数微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 在区间 $0<x<+\infty$ 有界，则实数 b 的取值范围是（ A ）

$A.\ b\geq 0$　　　$B.\ b\leq 0$　　　$C.\ b\leq 4$　　　$D.\ b\geq 4$

例10. 27 微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}+x$ 的一个特解是（ B ）

$A.\ ae^{-x}+bx+c$　　　$B.\ axe^{-x}+bx+c$

$C\ \ axe^{-x}+x(bx+c)$　　　$D.\ ae^{x}+x(bx+c)$

设 $y_1=e^{-x}$，$y_2=2x$ 是三阶线性齐次常系数微分方程 $y'''+ay''+by'+cy=0$ 的两个解. 则 a,b,c 的值分别为（ B ）

$A.\ a=2,b=1,c=0$　　　$B.\ a=1,b=0,c=0$

$C.\ a=1,b=0,c=1$　　　$D.\ a=-1,b=0,c=0$

例10. 28 已知方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有 3 个不同的特解 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$，且满足 $\dfrac{y_1(x)-y_2(x)}{y_2(x)-y_3(x)}\neq$ 常数，则原方程的通解 $y(x)=\underline{c_1[y_1(x)-y_2(x)]+c_2[y_2(x)-y_3(x)]+y_1(x)}$

例10.29 以 $y(x)=c_1+c_2e^x+x$ 为通解的二阶常系数线性常微分方程是____________________。

【解】由特征根为0,1，立得方程为 $y''(x)-y'(x)+1=0$。

例10. 30 设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是二阶线性齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解. 问能够由 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 的线性组合构成该方程的通解的充分必要条件为 （ B ）

$A.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_2(x)\cdot y_1'(x)=0$　　　$B.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_2(x)\cdot y_1'(x)\neq 0$

$C.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)+y_2(x)\cdot y_1'(x)=0$　　　$D.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)+y_2(x)\cdot y_1'(x)\neq 0$

例10. 31 具有特解 $y_1=e^{-x}$，$y_2=2xe^{-x}$，$y_3=3e^{x}$ 的三阶常系数线性齐次方程是（ ）

$A.\ y'''-y''-y'+y=0$　　　$B.\ y'''+y''-y'-y=0$

$C.\ y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ $D.\ y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

例10.32 若某二阶线性非齐次微分方程的两个解为 $3+x^2$， $e^{-x}+3+x^2$，且相应齐次方程的一个解为 x，则该非齐次方程的通解为 $\underline{3+x^2+C_1x+C_2e^{-x}}$ 。

例10.33 设 参数 $\delta \in \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{P_m}(\boldsymbol{t})$ 为 $\boldsymbol{m}$ 次实系数多项式。函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ 分别满足如下微分方程

(A) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=P_m(t)e^{-\delta t}\sin t$

(B) $\dfrac{dy}{dt}+y=x^2(t)$

(1) 问当δ满足什么条件时，对方程(A)的任意解 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$

(2) 问当δ满足什么条件时，对方程(B)的任意解 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$

当 $\delta>0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t x^2(\tau)e^{\tau}d\tau}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2(t)e^t}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}x^2(t)=0$，

此时有 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$.

例10.34 已知 e^x 是二阶齐次线性常微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=0$ 的一个解，则其通解为 $\underline{y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}}$ 。

【解】将解 e^x 代入方程立即得到 $q(x)=-1$，于是可求得方程的另一个解 e^{-x}。两个解 e^x，e^{-x} 线性无关，构成了方程的一个基本解组。因此通解为 $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$。

例10.35 设 $f(x)=x\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2\cos x+\dfrac{3}{4}x\sin x$。

例10.36 设 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 是某个二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

解题思路：设所求方程为 $y''+py'+qy=f(x)$. 先求 p,q，即确定齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$。由题目所给的非齐次微分方程的三个解可以求出齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解, 进而确定 p,q. 然后求 $f(x)$.

【解】 $f(x)=e^x-2xe^x$。(用 y_2, y_3 代入亦可)。

例10.37 (97)设 $f(u)$ 二阶连续可导，且 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\,e^{2x}$ 求

$f(u)$. 答案：$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$。

例10.38 (01 数 2) 若 $f'(x)=g(x), g'(x)=2e^x-f(x)$，$f(0)=0$ $g(0)=2$；求

$I=\int_0^{\pi}\left(\dfrac{g(x)}{1+x}-\dfrac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx$.　　　$\left(\int_0^{\pi} d\left(\dfrac{f(x)}{1+x}\right)=\dfrac{f(x)}{1+x}\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\dfrac{1+e^{\pi}}{1+\pi}\right)$

例10.39 (**03_1,2**)设函数 $y(x)$ 在 R 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\dfrac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

【解】 (1) $y''-y=\sin x$。

(2) 方所求初值问题的解为 $y=e^x-e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$。

例10.40 (**05_2**)用变量代换 $x=\cos t$ $(0<t<\pi)$ 化简微分方程

$(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ 的特解。

【解】 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0$，特征方程为：$\lambda^2+1=0$，特解为：$y=-2\cos t+\sin t$。

例10.41 设 $y=y(x)$ 是满足 $\begin{cases} y''-2by'+c\,y=0 \\ y(0)=y(2)=0 \end{cases}$ 的解， 具中 b,c 为实常数。试研究：

b,c 满足什么条件时， $y=y(x)$ 可为非零解？

【解】 当 $\sin 2\beta=0$，即存在正整数 k，使得 $\beta=\sqrt{c-b^2}=\dfrac{k\pi}{2}$，即 $\dfrac{2}{\pi}\sqrt{c-b^2}=k$ 为正整数时， 原定解问题可有非零解（$C_2\neq 0$），非零解为 $\hat{y}(x)=C_2\,e^{bx}\sin\left(k\,x\dfrac{\pi}{2}\right)$，

其中 C_2 为任意常数.

基础班微积分辅导第 11 章

多元函数微分学 I

多元函数概念；多元函数极限及连续性；多元函数的偏导数及其微分；综合例题

11.1 多元函数的概念

定义11.1　设Ω是R^n的一个子集，如果按照某种确定的法则f，使得每个$\vec{x}\in\Omega$，唯一地对应于一个实数u，则称f为定义在Ω上的一个（n元）函数，记成：

$$f:\Omega\to R$$

其中$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\Omega$是自变量，$\Omega$是这个函数的定义域.

实数u称为$\vec{x}$所对应的函数值。记成$u=f(\vec{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\quad(\vec{x}\in\Omega)$.

定义11.2　区域的定义，闭区域的定义。

开区域：非空连通开集。　闭区域：开区域的闭包。

例如，$D=\{(x,y)|a,x<b,c<y<d\}$是R^2上的开区域；$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$是$R^3$上的闭区域。

11.2 多元函数的表示

显式表示的函数：$z=f(x,y)$；

隐函数：　　用方程$F(x,y,z)=0$表示的函数$z=z(x,y)$；

用参数表示的函数：用参数方程$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(x,y)\end{cases}$，表示的函数$z=z(x,y)$.

三元函数：$u=f(x,y,z)$

11.3常见多元函数的几何意义

$z=f(x,y)$：$\Re^3$中的曲面的显函数表示；

$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(x,y)\end{cases}$：$\Re^3$中的曲面的参数表示；$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$：$\Re^3$中的曲线的参数表示。

例如：

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$是空间球面；$\begin{cases}x=R\cos\theta\cos\varphi\\ y=R\cos\theta\sin\varphi\\ z=R\sin\theta\end{cases}$是空间球面；$\begin{cases}x=R\cos\varphi\\ y=R\sin\varphi\\ z=a\varphi\end{cases}$是螺旋线。

11.4 多元函数的极限和连续的概念

定义11.3　　R^n中距离的定义：距离是$d(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{y}-\vec{x}\|$。

定义11.4　　多元函数的极限定义：

设 $f: D\subset R^n \to R$ ， $a\in R$， $\vec{x}_0 \in R^n$， $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$， 使得 $\forall\vec{x}\in D$，且 $0<d(\vec{x},\vec{x}_0)<\delta$， 都有 $|f(\vec{x})-a|<\varepsilon$.

定理11.1　　多元函数的极限如果存在，则是唯一的。

定理11.2　　$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[\alpha f(\vec{x})+\beta g(\vec{x})] = \alpha\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \beta\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})$

定理11.3　　$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A$： $f(\vec{x}) = A + o(1)$，　当 $\vec{x}\to\vec{x}_0$

- **多样性**：自变量变化趋势的多样性，引起多元函数极限形式的多样性

求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　答案：0

例11.1　求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$　　答案：0

例11.2　求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$　　答案： e

例11.3　设 $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$　$((x,y)\neq(0,0))$，研究极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 的存在性.

【解】　对于任意的 $(x,y)\neq(0,0)$，有 $0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2$． 所以

$$0\le|f(x,y)-0| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \le |x|+|y| \le 0$$

因此由极限定义得到 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

例11.4　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$（不存在）； $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$（不存在）

例11.5　设 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ \ y=x^2 \\ 0, & if\ \ y\neq x^2 \end{cases}$ ， 研究极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 的存在性.

答案：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

- 上面的例子说明，多元函数的极限问题要比一元函数的情形复杂得多. 必须要考察动点 (x,y) 以各种不同方式趋向于定点 (x_0,y_0) 时， 函数的变化趋势.

- 当 $\vec{x}$ 沿两条不同的路径趋于 $\vec{x}_0$ 时，函数有两个不同的极限，则函数的极限不存在

- **累次极限** $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ **与重极限** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

例11.6 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0 \\ 0, & x\cdot y=0 \end{cases}$

答案：两个二次极限都不存在，但二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例11.7 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$

答案：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

- 重极限与累次极限没有关系

定理11.4 重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在，则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在但不等，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在

定义11.5 **连续：** $f(x)$ 在 $\vec{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$

定理11.5 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 点连续 $\Leftrightarrow f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+o(1)$, 当 $\vec{x}\to\vec{x}_0$

例11.8 考察函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的连续性. 答案：

在 (x_0,y_0) 点，若 $x_0\neq 0$，函数连续;若 $x_0=0$，当 $y_0\neq 0$ 时，不连续，当 $y_0=0$ 时，连续

定理11.6 连续函数的运算性质：

（1）四则运算的连续性：如果 $f,g\in C(\Omega)$，那么对于任意的常数 α,β，

函数 $\alpha f+\beta g\in C(\Omega)$； $f\cdot g\in C(\Omega)$；$g\neq 0$ 的点处，$\dfrac{f}{g}\in C(\Omega)$

（2）复合运算：设函数 $u(x,y),v(x,y)$ 都在区域 Ω 上连续, 函数 $f(u,v)$ 在区域 Ω_1 上连续, 并且当 $(x,y)\in\Omega$ 时有 $(u(x,y),v(x,y))\in\Omega_1$, 则复合函数 $f(u(x,y),v(x,y))$ 也在区域 Ω 上连续.

（3）多元初等函数在它们的定义区域内部是处处连续的。

11.5 有界闭区域上多元连续函数的性质

定理11.7 有界闭区域上多元连续函数的最大最小值定理 设 $\Omega\subseteq R^n$ 是有界闭区域，$f\in C(\Omega)$，则 f Ω 上有界. 且存在 $P_1\in\Omega, P_2\in\Omega$，使得 $f(P_1)=\min\limits_{P\in\Omega} f(P)$，$f(P_2)=\max\limits_{P\in\Omega} f(P)$.

定理11.8 有界闭区域上多元连续函数的介值定理 设 $\Omega\subseteq R^n$ 是有界闭区域(连通的)，$f\in C(\Omega)$. 则对介于 $m=\min\limits_{P\in\Omega} f(P)$ 和 $M=\max\limits_{P\in\Omega} f(P)$ 之间的每个实数 μ，都存在 $P\in\Omega$，满足 $f(P)=\mu$.

定理11.9 推论：零点定理：设 $\Omega\subseteq R^n$ 是连通域，$f\in C(\Omega)$. 若存在两点，$P,Q\in\Omega$，使

得 $f(P)\cdot f(Q)\le 0$，则存在 $P_\xi\in\Omega$， $f(P_\xi)=0$；

特别是，当 Ω 为凸集（ 即：$\forall P,Q\in\Omega\Rightarrow \overline{PQ}\subset\Omega$）时，则存在 $P_\xi\in\overline{PQ}\subset\Omega$，$f(P_\xi)=0$

例11.9　若 $z=f(x,y)$在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=+\infty$，证明 函数 f 在 R^2 上一定有最小值点。

例11.10　$f(\mathbf{x})$ 在 R^n 上连续, 且(1)　$\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$ 时，　$f(\mathbf{x})>0$，(2)　$\forall c>0,\quad f(c\mathbf{x})=cf(\mathbf{x})$.

证明：存在 $a>0,b>0$，使 $a|\mathbf{x}|\le f(\mathbf{x})\le b\mathbf{x}$.

11.6 多元函数偏导数和全微分

定义11.6
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记号：$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$，或 $f_x'(x_0,y_0)$；$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$，或 $f_y'(x_0,y_0)$

例11.11　$z=\dfrac{y}{x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$；　$\dfrac{\partial y}{\partial x}=z$，　$\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}=\dfrac{1}{x}\cdot z\cdot\left(\dfrac{-y}{z^2}\right)=-1$

11.6 全微分存在的必要条件和充分条件

定义11.7　若 f 在$U_\delta(P_0)\subset D$有定义，且存在不依赖 $\Delta x,\Delta y$ 的 A,B，使多元函数在 $P_0(x_0,y_0)$点的增量

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\ \Delta=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称 f 在 $P_0(x_0,y_0)$点可微，并称线性函数 $A\Delta x+B\Delta y$ 为在点的全微分，记成　$df(x_0,y_0)=Adx+Bdy$ 。

- 必要条件：可微，偏导数必存在。证明：用可微的定义证明。
- 充分条件：　$f_x'(x,y)$和 $f_y'(x,y)$连续。

例11.12　设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，则

$df(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]dx+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]dy$

令 $x=0,y=0$，　$df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$.

(1)指出错误；　　(2)写出正确的解法.

答案：$\varphi(x,y)$ 在（0，0）处连续，未必有偏导数。 用可微的定义解。

例11.13　函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0, 0)是否可微?

在(0, 0)点的偏导数为什么?　　答案：函数可微，两个偏导数均为 0.

例11.14　讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性与偏导数的存在性.

答案：不连续，但偏导数存在.

例11.15 设$z(x,y)$定义在矩形区域$D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$上的函数。证明:

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$

例11.16 下列条件能够推出$f(x,y)$在(x_0,y_0)点可微,且全微分$df=0$的是（ D ）.

(A) 在点(x_0,y_0)两个偏导数$f'_x=0, f'_y=0$

(B) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全增量$\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$,

(C) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全增量$\Delta f=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全增量$\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

例11.17 （07）二元函数$f(x,y)$在点（0，0）处可微的一个充分条件是（ C ）。

（A） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$。 （B） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$。（C） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（D） $\lim\limits_{x\to 0}[f_x{}'(x,0)-f_x{}'(0,0)]=0$，且$\lim\limits_{y\to 0}[f_y{}'(0,y)-f_y{}'(0,0)]=0$

例11.18 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点$(0,0)$处（ C ）

A.连续且偏导数存在　　B. 不连续但偏导数存在
C.连续但偏导数不存在　　D. 不连续且偏导数不存在

例11.19 设$z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求dz。

例11.20 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$（ $A.$ ）

$A.\,0$　　$B.\,\dfrac{1}{2}$　　$C.\,1$　　$D.$ 不存在

例11.21 已知$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$,试讨论:（1） $f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性；（2） $f(x,y)$在$(0,0)$处的两个偏导数是否存在；（3） $f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性。

答案：（1） $f(x,y)$在$(0,0)$处连续。（2） 存在。（3） $f(x,y)$在$(0,0)$处不可微。

11.7 多元复合函数、隐函数的求导法

(1) 多元复合函数

定理11.10　设二元函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处偏导数连续，二元函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数连续，并且 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$，则复合函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

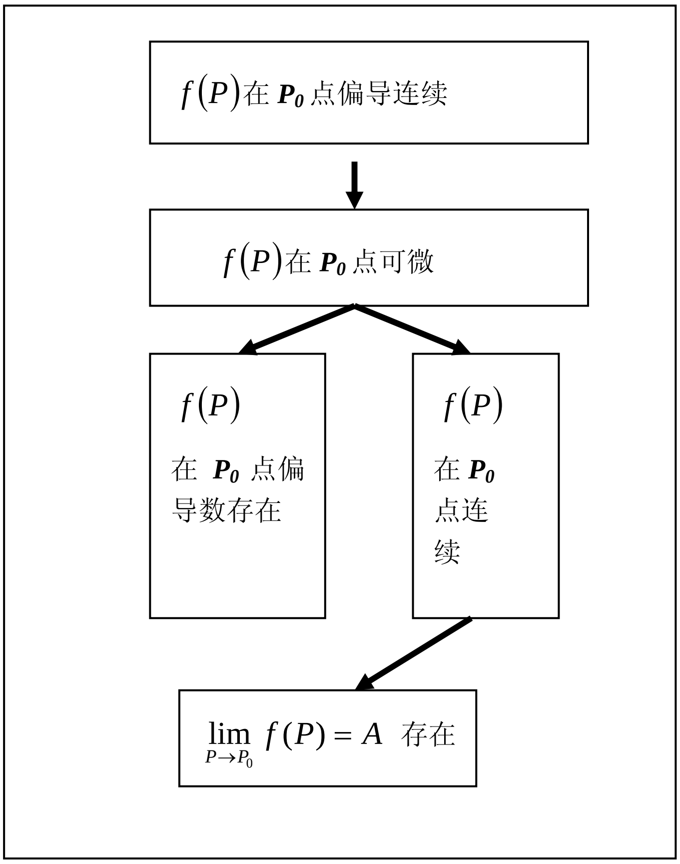
例11.22 已知 $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.　　答案：$\left(\frac{1}{x}\right)^{2-\frac{1}{x}}(1-\ln x)$.

例11.23 设 $z=f(xy,\frac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

答案：$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}$.

注意：（1） $f_1'=\frac{\partial f}{\partial u},f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$ 都是以 u,v 为中间变量，以 x,y 为自变量的函数；

（2）记号 $f_1'=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},f_2'=\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ 的规定与使用。



例11.24 (07 数一) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f(\frac{y}{x},\frac{x}{y})$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$__________。

例11.25 设 $u=f(x,y), x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$f$ 可微，证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

例11.26 设 f 可微，求偏导数：$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$

(2)隐函数

定义11.8 设 F 是一个二元函数，对于方程 $F(x,y)=0$，如果在区间 (a,b) 中的所有的 x，都存在**唯一**的 y，使得 (x,y) 满足上述方程，即 $F(x,f(x))\equiv 0\ (\forall x\in(a,b))$. 则称由方程 $F(x,y)=0$ 确定了 (a,b) 上的一个**隐函数** $y=f(x)$。

例如考察圆周 C：$x^2+y^2=1$，显然，整个圆周既不能表示为 $y=f(x)$，也不能表示为 $x=x(y)$. 但是在点 $(0,1)$ 的某个邻域中的那部分曲线可以表示为 $y=\sqrt{1-x^2}$；在点 $(1,0)$ 的某个邻域中的那部分曲线可以表示为 $x=\sqrt{1-y^2}$.

定理11.11 隐函数存在性定理：设 $F(x,y)$ 是 $C^{(1)}$ 类函数，即 $F(x,y)$ 的两个偏导数都连续，$F(x_0,y_0)=0$，$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$，则存在 $\eta,\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0-\eta,\ x_0+\eta)$，存在唯一的 $y\in(y_0-\delta,\ y_0+\delta)$ 满足 $F(x,y)=0$。这样定义的隐函数 $y=y(x)$ 连续可微，且 $y'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}$。

- 隐函数的另一种求导法：若函数 $y=y(x)$，由方程 $F(x,y)=0$ 确定，求导之函数？

按隐函数定义有恒等式：$F(x,y(x))\equiv 0\Rightarrow \frac{d}{dx}F(x,y(x))=0$，

$$\Rightarrow F'_x(x,y(x))+F'_y(x,y(x))\cdot y'(x)=0\Rightarrow y'(x)=-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))}。$$

从这是可见：函数 $y=y(x)$ 可导有一个必要条件是，$F'_y(x,y)\neq 0$.

例11.27 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $ax+by=f(x^2+y^2)$, a,b 是常数，求导函数。

答案：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xf'(x^2+y^2)-a}{b-2yf'(x^2+y^2)}$

一般来说，若函数 $y=y(\vec{x})$，由方程 $F(\vec{x},y)=0$ 确定，求导之函数？

将 y 看作是 $x_1,\ldots,x_n$ 的函数 $y=y(\vec{x})=y(x_1,\ldots,x_n)$，对于方程

$$F(x_1,\ldots,x_n,y(x_1,\ldots,x_n))=0$$

两端分别关于 x_i 求偏导数得到，并解 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$，可得到公式：$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F'_{x_i}(\vec{x},y)}{F'_y(\vec{x},y)}$

例11.28 设函数 $x=x(z)$，$y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定，求

$\frac{dx}{dz}$，$\frac{dy}{dz}$.　　　　　　答案：$\frac{dx}{dz}=-\frac{3z}{x},\frac{dy}{dz}=\frac{2z}{y}$.

例11.29　已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程：$\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=uv\end{cases}$，给定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

答案：$\frac{\partial z}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}=v\cos v-\sin v$；$\frac{\partial z}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=v\sin v+\cos v$

例11.30 隐函数函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $\begin{cases}z=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

答案：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}}$.

11.8 二阶偏导数：一阶导函数的偏导数

例11.31 求 $f(x,y,z)=x^{y^z}$ 的二阶偏导

答案：$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(y^z\right)\cdot x^{y^z-1}+y^z\cdot\frac{\partial}{\partial z}x^{y^z-1}=y^z\ln z\cdot x^{y^z-1}+\frac{y^z}{x}x^{y^z}\ln x\cdot y^z\cdot\ln y$

例**11.32**　$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的二阶偏导是否存在？

答案：不存在。用定义。

例11.33　　$f(x,y)=\begin{cases}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1$，$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=1$

定理11.12　若二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 连续，则与求导次序无关，即：$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

例11.34 已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某个二元函数的全微分，则 $a=$（ D ）

$A.-1$　　$B.\ 0$　　$C.\ 1$　　$D.\ 2$

例11.35　$z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 决定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.　答案：$-\frac{xy}{z^3}$

例**11.36** 设 $g(x)=f\left(x,\varphi\left(x^2,x^2\right)\right)$，其中函数 f 于 φ 的二阶偏导数连续，求 $\frac{d^2 g(x)}{dx^2}$

例11.37 设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

答案：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2 f''_{11}+2f''_{12}+\dfrac{1}{y^2}f''_{22}$.

例11.38 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

若令$\begin{cases}u=x+\alpha y\\ v=x+\beta y\end{cases}$，试确定$\alpha,\beta$为何值时能变原方程为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

答案：$\alpha=-B+\sqrt{B^2-AC}$，$\beta=-B-\sqrt{B^2-AC}$。

例11.39 设$u(x,y)\in C^2$，又$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$，求 $u''_{xx}(x,2x)$，

$u''_{xy}(x,2x)$　$u''_{yy}(x,2x)$。答案：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,2x)=\dfrac{5}{3}x$

11.10 近两年的考题

例11.40 设函数$u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

例11.41 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$ 其中函数φ具有二阶导数ψ具有一阶导数，则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　　[B]

例11.42 设有三元方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$.　　[D]

例11.43 设二元函数$z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则$dz|_{(1,0)}=\underline{2edx+(e+2)dy}$。

例11.44 设在上半平面$D=\{(x,y)|y>0\}$内，函数$f(x,y)$具有连续偏导数,且对任意的

$t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

例11.45 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\underline{-e}$

例11.46 设函数 $f(u)$ 在(0,+∞)内具有二阶导数，且 $Z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$。(Ⅱ)若 $f(1)=0,\ f'(1)=1$ 求函数$f(u)$的表达式。.

例11.47 设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 (1,2) 处的全微分 $\left.dz\right|_{(1,2)}=\underline{4dx-2dy}$。

例11.48 （07）已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$所确定，设 $z=f(\ln y-\sin x)$，求 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0},\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$。

基础班微积分辅导第 12 章

向量代数及空间解析几何、梯度与方向导数

多元微分的几何应用

12.1 向量的概念

定义**12.1** 不仅具有大小, 而且具有确定方向. 这样的量称为向量.

- 向量的几何意义及表示：$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$
- 长短　$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
- 方向 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right)$

12.2 向量的线性运算

- **向量的加法**：向量的加法 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 服从平行四边形法则和三角形法则
- **向量的数乘**：设 $\vec{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个实数．用实数乘以向量的运算称 $\lambda\vec{a}$ 为向量的数乘，它是向量：

  模：　$|\lambda\vec{a}|$ 等于 $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

  方向：　当 $\lambda>0$ 时, 与 $\vec{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时, 与 $\vec{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 是零向量.

- **单位向量**：若 $\vec{a} \neq \theta$（零向量），则 $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 是一个单位向量，并且 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$

12.3 向量的数量积和向量积

定义12.1 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的**数量积** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 定义为 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$．若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 非零，则 $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$
- $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$； $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
- 向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影：$(\vec{a})_{\vec{b}} = \vec{a}\cdot\vec{b}_0 = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

定义12.2 $\vec{a},\vec{b}$ 的叉积 $\vec{a}\times\vec{b}$（向量积）是一个向量，

它的长度：$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，以向量 $\vec{a},\vec{b}$ 作邻边组成一个平行四边形的面积；

它的方向：由所谓“右手法则”确定。

- $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
- $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\times\vec{c} = \lambda\vec{a}\times\vec{c} + \mu\vec{b}\times\vec{c}$
- $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}$

12.4 向量的混合积

定义12.3 向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积为 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，记作 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$，它是数量。

- 以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱作平行六面体，则这个平行六面体的体积等于 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
- $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},c) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件是 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$

12.5 用空间直角坐标系进行向量运算

设 $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ 为任意两个向量，则

定义12.4 向量的加法运算：$\vec{a}\pm\vec{b} = (a_1\pm b_1)\,\vec{i} + (a_2\pm b_2)\,\vec{j} + (a_3\pm b_3)\,\vec{k}$

- **数乘**：$\lambda\,\vec{a} = \lambda a_1\,\vec{i} + \lambda a_2\,\vec{j} + \lambda a_3\,\vec{k}$；或 $\lambda\,\vec{a} = (\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$

以上是向量的线性运算。

- **数量积** $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$；

特别有 $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}$，$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$

如果 $\vec{a}$ 是一个单位向量，即 $|\vec{a}| = 1$，则

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}\vec{i} + \frac{a_2}{|\vec{a}|}\vec{j} + \frac{a_3}{|\vec{a}|}\vec{k} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

其中 α,β,γ 是向量 $\vec{a}$ 与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的夹角．$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦。显然有 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

- **向量积**，注意到 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是互相垂直并且成右手系的三个向量，所以

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$
$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

- **混合积的计算**：设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$，　则

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=$$
$$=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\right)\bullet(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})=$$
$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

例12.1 设 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-2\vec{i}+\vec{k}$, 求以 $\vec{a},\vec{b}$ 为边的平行四边形的对角线的长度.

答案：$\sqrt{3}$，$\sqrt{11}$

例12.2 设 $\vec{a}=(1,1,4),\ \vec{b}=(1,-2,2)$, 求 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量. 答案：$\left(\dfrac{7}{9},\dfrac{-14}{9},\dfrac{14}{9}\right)$

例12.3 设有三点 $A(1,2,0),\ B(-1,3,1),\ C(2,-1,2)$, 求 ΔABC 的面积 S.　答案：$\dfrac{\sqrt{99}}{2}$

例12.4 试证　$A(1,1,-1),\ B(-2,-2,2)$, 及 $C(1,-1,2),\ D(0,0,0)$ 四点共面.

证明思路：$\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)=0$

例12.5 已知　$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\mathbf{b}-2\mathbf{a}$，且 $|\mathbf{a}|=1,|\mathbf{b}|=4$，求 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 的夹角 θ 与 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

答案：　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\sqrt{3}$

例12.6 已知 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\alpha$，求 $I=[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})$。答案：$2\alpha$

12.6 平面方程

- 法向为 $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$, 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

- 任何三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$，其图形定一张法向 $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$，的平面。

例12.7 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ 不共线, 求过这三点的平面 π.

答案：$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0.$

例12.8 已知平面 π 过两点 $M_1(1,0,-1)$, $M_2(-2,1,3)$, 并且与向量 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ 平行, 求

此平面的方程. 答案：$5x+11y+z-4=0$

例12.9 求过直线 $L_1:\begin{cases}x-2y-7=0\\2x-z=0\end{cases}$ 并与直线 $L_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 平行的平面方程. 答案：$-9(x-1)+14(y+3)+(z-2)=0$

12.7 直线方程式

如果已知直线 L 通过一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，并且与向量 $\vec{v}=(l,m,n)$ 平行, 则可以唯一地确定这条直线.

$M(x,y,z)$ 在 L 上的充要条件是 向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\vec{v}$ 平行, 即存在 t, 使得 $\overrightarrow{M_0M}=t\,\vec{v}$

即 $\vec{r}-\vec{r}_0=t\,\vec{v}$ 这就直线 l 的向量方程. 向量 $\vec{v}$ 称为该直线的方向向量。

- 通过一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\vec{v}=(l,m,n)$ 的直线参数方程是：

$$\begin{cases}x=x_0+l\,t\\y=y_0+m\,t\\z=z_0+n\,t\end{cases}\qquad(-\infty<t<+\infty)$$

- 消去参数 t，得到直线的标准方程(或直线的点向式方程)：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

- 直线作为两个平面的交线 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$

例12.10 已知直线经过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 求直线方程.

答案：直线的参数方程为 $\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\y=y_1+(y_2-y_1)t\\z=z_1+(z_2-z_1)t\end{cases}\qquad(-\infty<t<+\infty)$

例12.11 若直线 l 由两个平面 $\pi_1:3x+2y+4z-11=0$ 和 $\pi_2:2x+y-3z-1=0$ 相交而成, 求该直线的参数方程. 答案：$\begin{cases}x=1-10t\\y=2+17t\\z=1-t\end{cases}\qquad(-\infty<t<+\infty)$

例12.12 过点 $M(2,3,1)$ 作直线 L 与另两条直线:

$$L_1:\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{2},\qquad L_2:\begin{cases}x+3y=1\\y+z=2\end{cases}$$

都相交，求直线 L 的方程. 答案：$L:\dfrac{x-2}{55}=\dfrac{y-3}{10}=\dfrac{z-1}{7}$

例12.13 判断直线 $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 与 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-8}{-3}$ 之间的关系，若平行或异面，求两直线之间的距离。 答案：$\dfrac{5}{3}$

12.8 平面与平面、平面与直线、直线与直线的平行、垂直的条件

(1) 两个空间平面的相互关系：

重合 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$，且有一点重合；**平行** $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$； **垂直** $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$。

(2) 两条空间直线的相互关系：

相交

平行 $\vec{T}_1 // \vec{T}_2$

共面 $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ 以及两条曲线上个取一点构成的向量共面

异面 $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ 以及两条曲线上个取一点构成的向量不共面

(3) 点与直线的关系：

点在直线上；

点不在直线上（点到直线的距离）：设直线为 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$，点 (x_0, y_0, z_0)

$$d=\left|(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)-(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)\cdot\frac{(l,m,n)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\right|$$

(4) 点与空间平面的关系：

点不在空间平面上（点到空间平面的距离）：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

点在空间平面上 $d=0$

(5) 直线与空间平面的关系

相交 $\vec{T}$ 不垂直于 $\vec{n}$，平行 $\vec{T}\perp\vec{n}$

12.9 球面

以点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为中心, 以 $R(>0)$ 为半径的球面由下述方程确定：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

设 a, b, c 为正数, 由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 确定的曲面为**椭球面**.

12.10 二次曲面（二次方程的图形）：由方程认图.

单叶双曲面，双叶双曲面，椭圆抛物面，马鞍面，球面，椭球面

（1）**抛物面**

旋转抛物面：坐标面 zOx 上的抛物线 $z=ax^2$ $(a>0)$ 绕 Oz 轴旋一周得到的曲面称为旋转抛物面. 它的方程为 $z=a(x^2+y^2)$.

（2）**椭圆抛物面**：

由方程 $z=ax^2+by^2$ $(a,b>0)$, 确定的曲面称为椭圆抛物面.

（3）**双曲抛物面**：由方程 $z=ax^2-by^2$ $(a, b\text{同号})$ 确定的曲面称为**双曲抛物面**（马鞍面）.

12.11 特殊空间曲面：旋转面、柱面、锥面方程.

- 柱面：方程中缺变量：$x^2+y^2=r^2$；

柱面： 设 L 是空间一条曲线，l 是一条直线. 平行于 l 的直线沿着曲线 L 移动所形成的轨迹是一张曲面，称这张曲面为以 L 为准线的柱面. 沿曲线 L 移动的直线称为该柱面的母线.

例12.14　设 S 为以平面曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$ 为准线、母线平行与 Oz 轴的柱面，求 S 的方程.　答案：$x^2+y^2=a^2$

例12.15　设 S 为以抛物线 $L:\begin{cases}y=x^2\\ z=0\end{cases}$ 为准线、母线平行与 Oz 轴的柱面，求 S 的方程.

答案：$y=x^2$.

- 锥面：方程中变量次数相同，如 $z^2=a(x^2+y^2)$，$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$

设 L 是空间一条曲线，M 为 L 外一点．假定由点 M 出发的每一条射线与曲线 L 最多只有一个交点．由点 M 向曲线 L 上的每一个点引射线. 所有这些射线组成的曲面称为以 M 为顶点、以曲线 L 为准线的锥面.

例12.16　yOz 平面上的直线 $z=ky(k>0)$ 绕 Oz 轴旋转一周得到的旋转曲面

$$S:z=k\sqrt{x^2+y^2}$$

就是以原点为顶点、以曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=k\end{cases}$ 为准线的锥面.

- 旋转面，如 L：$f(y,z)=0$ 绕 **y** 轴旋转而成之曲面方程 为：

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

假设 L 是 yOz 坐标面上的一条曲线，方程为 $\begin{cases}F(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$，$y\ge 0$，求 L 绕 Oz 轴旋转一周所得到的旋转曲面 S 的方程式.

$M(x,y,z)$ 在曲面 S 上的充要条件是：

在曲线 L 上 $P(0,Y,z)$. 使得 $MM_0=PM_0$，其中 $M_0(0,0,z)$，$F(Y,z)=0$。

由 $MM_0=PM_0\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=|Y|$；

再由 $F(Y,z)=0\Rightarrow F\left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$，这就是所求旋转曲面 S 的方程.

例12.17　求平面曲线 $L:\begin{cases}z-y^3=0\\ x=0\end{cases}$　$(-1\le y\le 2)$　绕 Oz 轴旋转一周得到的旋转曲面的方程式.　　答案：$z+(x^2+y^2)^{3/2}=0$；或 $z^2=(x^2+y^2)^3$

12.12 近两年的考题

例12.18　由 $e^z=xy+yz+zx$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 存在的充分条件是____________，曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1,0)$ 处的为切平面方程为____________，

$z = f(x,y)$ 在点 $(1,1,0)$ 处的梯度为__________。

例12.19 点（2,1,0）到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d = \underline{\sqrt{2}}$.

梯度与方向导数

12.13 函数沿一方向上的变化，方向导数

定义12.1 函数 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 附近有定义，$\vec{l}$ 为一给定的向量，$\vec{x}$ 为过 $\vec{x}_0$ 点沿 $\vec{l}$ 方向的射线上的点，若 $\vec{x}$ 沿射线趋于 $\vec{x}_0$ 时, 极限

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

存在，则称该极限为函数 $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x}_0$ 点沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数, 记作

$$\frac{\partial f}{\partial l}(\vec{x}_0) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0\text{沿射线}}\frac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

定义12.2 梯度 $$grad f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial l}(\vec{x}_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot\vec{l}_0$
- 沿梯度方向 $\vec{l} = grad\ f(\vec{x}_0)$ 的方向导数最大，即沿梯度方向函数增加最快；
- 其模等于该点最大方向导数之值。

例12.20 $f(x,y) = 1-\sqrt{x^2+y^2}$，在 $(0,0)$ 点的各方向导数均为 -1，但函数在 $(0,0)$ 点不可微.

例12.21 设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微，$\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$. 如果 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec{v}}=-2,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\vec{u}}=1$，求 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分.

答案：$(\sqrt{5}-4\sqrt{2})dx+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})dy$.

例12.22 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数, 且在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分 $\dfrac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$. 则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（ ）

A. $\vec{i}$ B. $\vec{j}$ C. $\vec{i}+\vec{j}$ D. $\vec{i}-\vec{j}$

例12.23 若 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数存在，则（ B ）

（A） $f(x,y)$ 在 P_0 点连续；

（B）一元函数 $z=f(x,y_0)$ 和 $z=f(x_0,y)$ 分别在 $y=y_0$ 和 $x=x_0$ 连续；

（C） $f(x,y)$ 在 P_0 点的微分为 $dz=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}dx+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}dy$；

（D） $f(x,y)$ 在 P_0 点的梯度为 $grad\ f(P_0)=\left.\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right|_{P_0}$.

例12.24　如 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则下列命题中一定不成立的是（　C　）

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向 $\bar{v}$ 的方向导数不存在；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数都存在且连续；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数存在且至少有一个不连续.

多元微分的几何应用　多元微分的应用$\begin{cases} \text{几何}\begin{cases}\text{曲线}\begin{cases}\text{切线}\\ \text{法平面}\end{cases}\\ \text{曲面}\begin{cases}\text{法线}\\ \text{切平面}\end{cases}\end{cases}\\ \text{极值}\begin{cases}\text{无条件极值}\\ \text{条件极值}\end{cases}\end{cases}$

12.14 空间曲面

(1) 空间曲面的表达式

显函数：$z=f(x,y)$，隐函数：$F(x,y,z)=0$，参数：$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D_{uv}\subset R^2$

(2) 空间曲面的切平面与法线

- 空间曲面 S 由显函数表示 $z=f(x,y)$，设 $z_0=f(x_0,y_0)$，空间曲面 S 过 $P_0(x_0,y_0)$ 切平面方程为

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y\ )}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程是
$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}$$

法向量为
$$\vec{n}=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},-1\right)$$

空间曲面 S 存在切平面的条件：若曲面 S 由显函数表示 $z=f(x,y)$ 在点 $p(x_0,y_0)$ 可微，则曲面 S 在点 $p(x_0,y_0)$ 有不平行 z 轴的切平面.

- 若曲面 S 由隐函数 $F(x,y,z)=0$ 表示，曲面 S 过 $(x_0,y_{0,}z_0)$ 切平面方程为

$$\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)++\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}$$

法向量 $$\vec{n}=\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\quad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\quad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

- 若曲面 S 由参数表示：$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D_{uv}\subset R^2$，其切平面为

$$\begin{cases}x-x(u_0,v_0)=\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0)+\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0)\\ y-y(u_0,v_0)=\dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0)+\dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0)\\ z-z(u_0,v_0)=\dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)(u-u_0)+\dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0)\end{cases}$$

或

$$\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}[x-x(u_0,v_0)]+\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}[y-y(u_0,v_0)]$$

$$+\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}[z-z(u_0,v_0)]=0$$

法线方程为 $$\frac{[x-x(u_0,v_0)]}{\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{[y-y(u_0,v_0)]}{\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{[z-z(u_0,v_0)]}{\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}}$$

法向量 $$\vec{n}=\left(\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)},\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)},\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{(u_0,v_0)}\right)$$

例12.25　求曲面 $S:2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。　答案：$\begin{cases}x=x\\ y=(2x-5)/8\\ z=(-60x^2-60x+57)/64\end{cases}$

例12.26　证明球面 $S_1:x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2:x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

证明思路：在公共点处两曲面的法向量相互垂直.

例12.27　过直线 $10x+2y-2z=27,\quad x+y-z=0$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求该切平面的方程．答案：$9x+y-z-27=0$，或 $9x+17y-17z+27=0$

例12.28　通过曲面 $S:e^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（　B　）

（A）通过 y 轴；（B）平行于 y 轴；（C）垂直于 y 轴；（D） A， B， C 都不对.

例12.29　已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.　证明思路：定点为 (a,c,b) .

例12.30　S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定，试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。　证明思路：定直线为 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 。

例12.31　求过直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$ 且与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\dfrac{5}{8}$ 相切的平面的方程.　答案：$6(x-3/2)+(y+1/4)+2(z+15/8)=0$ 或

$$10(x-5/6)+5(y+5/12)+6(z+5/24)=0$$

例12.32　在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。　答案：$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$

12.15 空间曲线的切线和法平面

(1)空间曲面的表达式

- 空间曲面的参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad(\alpha\le t\le\beta)$

参数方程又可以写作　$\vec{r}=\vec{r}(t)=\left(x(t)\quad y(t)\quad z(t)\right)^T$；　$(\alpha\le t\le\beta)$

- 空间曲线的交面式：一条空间曲线 L，可以看作通过它的两个曲面 S_1 与 S_2 的交线，若设 S_1 的方程为 $F(x,y,z)=0$， S_2 的方程为 $G(x,y,z)=0$，则 L 的方程是

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

(2)空间曲线的切线与法平面

- 空间曲面的参数方程表示，其切线为　$\begin{cases}x=x_0+x'(t_0)(t-t_0)\\x=y_0+y'(t_0)(t-t_0)\\z=z_0+z'(t_0)(t-t_0)\end{cases}$

切向量为：　$\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$

法平面为：　$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

- 空间曲线的交面式表达方式，其切线为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}}$$

切向量为：$\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)},\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)},\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$

法平面为：

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)=0$$

例12.33　求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面. 答案：切线的参数方程为 $\begin{cases}x=a/\sqrt{2}-a/\sqrt{2}\,t,\\ y=a/\sqrt{2}+a/\sqrt{2}\,t,\\ z=(\pi/4)c+ct,\end{cases}$

法平面方程为　$-(a/\sqrt{2})(x-a/\sqrt{2})+(a/\sqrt{2})(y-a/\sqrt{2})+c(z-(\pi/4)c)=0$.

例12.34　求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$，在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

答案：$\begin{cases}x=1+10t\\ y=1-10t\\ z=2\end{cases}$

例12.35　设曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$. 答案：$\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$，$(-1,1,-1)$.