第 8 讲　广义积分 阶段综合问题

8.1 广义积分的定义及收敛性

定积分研究的问题:　有界函数在有界区间上的积分.

广义积分研究的问题:有界函数在无界区间上的积分(第 1 类).无界函数在有界区间上的积分(第 2 类)。

定义 8.1 (第一类广义积分)设函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 内的任意有限区间可积,并且极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在,则称 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 广义积分收敛,其广义积分为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$,若不收敛,则称广义积分发散。

定义 8.2 (第二类广义积分)设函数 $f(x)$ 在$[a,b)$ 内的任意有限闭子区间可积,并且极限 $\lim\limits_{B\to b^-}\int_a^B f(x)dx$ 存在,则称 $f(x)$ 在$[a,b)$ 上的广义积分收敛,其广义积分为

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{B\to b^-}\int_a^B f(x)dx$。

同样我们可以定义其它广义积分的收敛性:

$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{A\to a^+}\int_A^b f(x)dx$。

8.2 收敛性的判断准则

8.2.1 第一类广义积分收敛性的判断准则

准则 8.1 若第一类广义积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛,此时称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛.

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 方发散时,称广义积分条件收敛.

准则 8.2 若非负函数 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$ 单调有界,则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛

准则 8.3(直接比较法)非负函数 $0\le f(x)\le g(x),\ x\in[a,+\infty)$,若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛,$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 一定收敛;若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散,$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 一定发散.

准则 8.4(极限比较法)设 $f(x),g(x)$ $[a,+\infty)$ 内的任意有限区间可

积，$g(x)$ 非负，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$，则

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $\lambda=0$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

(3) 当 $\lambda=\infty$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛.

准则 8.5 （尺度法） $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$ $(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散.

因此，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda\ge 0$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

例 8.1 判断 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ 的收敛性.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=0$，存在 $X>0$，使得当 $x>X>0$ 时，$\ln x<\sqrt[3]{x}$，

$\dfrac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}<\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+1}}$，$p=\dfrac{7}{6}>1$，由直接比较法，收敛.

例 8.2 判断 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$ 的收敛性. 解：与 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ 比较，由极限比较法，收敛.

例 8.3 判断 $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^2 x}$ 的收敛性.

【解】 $\dfrac{x^p}{x^p\ln^2 x}=\dfrac{1}{\ln^2 x}\to 0\ (x\to+\infty)$，因此 $p>1$ 时 $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p\ln^2 x}$ 收敛.

$p=1$ 时，$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}=\lim\limits_{B\to+\infty}\left[\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^B\right]=1$，

$p<1$ 时，与 $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$ 比较，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{p-1}n^2 x}=+\infty$，

因此答案为：$p\ge 1$ 时收敛，$p<1$ 时发散。

8.2.2 第二类广义积分收敛性的判断准则

准则 7.5 若第二类广义积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，$\int_a^b f(x)dx$ 一定收敛，此时称

$\int_a^b f(x)dx$ 绝对收敛. $\int_a^b f(x)dx$ 收敛而 $\int_a^b |f(x)|dx$ 方发散,则称广义积分条件收敛.

准则 8.6（直接比较法）非负函数 $0 \le f(x) \le g(x), x \in [a,b)$ ，若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，$\int_a^b f(x)dx$ 一定收敛；若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，$\int_a^b g(x)dx$ 一定发散.

准则 8.7 函数(极限比较法) $f(x), g(x)$ 在 $[a,b)$ 内的任意区间上可积, $g(x)$ 非负，且 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ ，则

(1) 当 $\lambda \ne 0$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 有相同的敛散性；

(2) 当 $\lambda = 0$ 时，广义积分 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(3) 当 $\lambda = \infty$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛.

准则 8.8（尺度法） $\int_a^b \dfrac{1}{(x-b)^p}dx$ 当 $p<1$ 收敛， $p \ge 1$ 时发散. 因此，若 $\lim\limits_{x\to b^-}(x-b)^p f(x) = \lambda \ge 0$,且 $p<1$,则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

例 8.4 判断广义积分 $\int_0^\pi \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ 的收敛性.

【解】 $\int_0^\pi \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$,

第一个积分显然收敛，对第二个积分令 $x - \pi = t, dx = dt$ ，

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \dfrac{1}{\sqrt{\sin t}}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ ，收敛.

例 8.5 计算 $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$ 。

【解】取变换 $x = \tan t, dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ ，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t}{1+5\tan^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin t}{1+4\sin^2 t} = \frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\arctan 2$$

例 8.6 设常数 $a>0$，若

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$，则 $a=$___ 。

【解】 $\arctan a=\frac{\pi}{2}-\arctan a$，

$\arctan a=\frac{\pi}{4}, a=1$.

例 8.7 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

【解】 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d(\frac{1}{x})$

$$=-\frac{1}{x}arctanx\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

例 8.8 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$________ 。

【解】 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\sec t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$ 或令 $x=\frac{1}{t}$，

用凑微分法，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

例 8.9 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=$______.　　　答案：$\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}$.

【解】取变换 $e^x=\sec t$，则

$x=\ln(\sec t),\quad e^x dx=\sec t\tan t dt$，

$$I=\int_{\arccos e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\tan t}dt=\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}=\arcsin e^{-1}$$

例 8.10 计算广义积分 $\int_0^1 x\ln^n x dx$。

【解】 采用分部积分，即有

$$I_n=\frac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{n}{2}I_{n-1}$$

$$=\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)I_{n-2}=\cdots=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}.$$

或 $I_1=-\frac{1}{4}$，$I_n=-\frac{n}{2}I_{n-1}$。

8.3 阶段复习综合问题

定积分定义在考研中的应用 用于求特定极限

运用定积分求极限常用公式为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}k)=\int_a^b f(x)dx$。

其中 $\frac{b-a}{n}k=f(\xi_k)$，$\frac{b-a}{n}=\Delta x_k$。

例 8.11　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。答案：$\frac{1}{e}$。（清华大学考研辅导班 2004 强化班例题）

【解】 记 $y_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$，则　$\ln y_n=\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k-\ln n$，

或记为

$$\ln y_n=\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n},$$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}$ 等于广义积分 $\int_0^1\ln xdx$ 的值，

相应于将区间 $[0,1]$ 分割成 $[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\,(k=1,2,\cdots,n)$ 的积分和式的极限，

且积分和式中的 $f(\xi_k)=\ln\frac{k}{n}$。

注意到广义积分 $\int_0^1\ln xdx$ 为第二类广义积分，并且收敛，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln xdx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$。

类似方法可以计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi xdx=\frac{2}{\pi}$。

其中 $\Delta x_k=\frac{1}{k},\sin\xi_k=\sin\frac{k\pi}{n}$。请看 2004 年考题：

(2004-209) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 [B]

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx.$　　　　(B) $2\int_1^2 \ln x dx.$

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)dx.$　　　　(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)dx.$

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)$

$= 2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = 2\int_0^1\ln(1+x)dx = 2\int_1^2 \ln t dt =$ (B)。

$= 2\int_1^2 \ln t dt = 2(t\ln t - t)\Big|_1^2 = 4\ln 2 - 2$

例 8.12 设 $a_n = \frac{3}{2}\int_0^{n/(n+1)} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}dx$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n =$ [B]。

(A) $(1+e)^{3/2}+1$。　　(B) $(1+\frac{1}{e})^{3/2}-1$。

(C) $(1+\frac{1}{e})^{3/2}+1$。　　(D) $(1+e)^{3/2}-1$。

【解】 积分得

$$a_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{n/(n+1)}(1+x^n)^{1/2}d(1+x^n)$$

$$=\frac{1}{n}(1+x^n)^{3/2}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}[(1+(\frac{n}{n+1})^n)^{3/2}-1]$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}[1+(\frac{n}{n+1})^n]^{3/2}-1 = (1+\frac{1}{e})^{3/2}-1$$

例 8.13 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$，且 f(1)=0，则 $f(x)=$ $\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2}$.

【分析】 先求出 $f'(x)$ 的表达式，再积分即可。

【解】 令 $e^x = t$，则 $x=\ln t$，于是有

$$f'(t) = \frac{\ln t}{t},\quad 即\quad f'(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

积分得 $f(x) = \int\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$. 利用初始条件 $f(1)=0$，得 C=0，

故所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

例 8.14 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \\ -1, & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$ $\underline{\quad -\frac{1}{2} \quad}$.

【分析】对分段函数的定积分，先取区间变换：$x-1=t$，再利用对称区间上奇偶函数

的积分性质。

【解】令 $x-1=t$，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)dt$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=0+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}.$$

例 8.15 设 $F(x)=\begin{cases} e^{2x}, & x\le 0 \\ e^{-2x}, & x>0\end{cases}$，$S$ 表示夹在 x 轴与曲线 $y = F(x)$之间的面积。 对任何 $t>0$，$S_1(t)$ 表示矩形$-t\le x\le t$，$0\le y\le F(t)$的面积. 求

(1)　$S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式；

(2)　$S(t)$的最小值.

【分析】曲线 $y=F(x)$关于 y 轴对称，x 轴与曲线 $y=F(x)$围成一无界区域，所以，面积 S 可用广义积分表示. ，属于基本题型。

【解】(I)　$S=2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1$，

矩形$-t\le x\le t$，$0\le y\le F(t)$的面积为 $S_1(t)=2te^{-2t}$，

因此 $S(t)=1-2te^{-2t}$，$t\in(0,+\infty)$.

(II) 由于 $S'(t)=-2(1-2t)e^{-2t}$，

故 $S(t)$的唯一驻点为 $t=\frac{1}{2}$，

又 $S''(t)=8(1-t)e^{-2t}$，$S''(\frac{1}{2})=\frac{4}{e}>0$，

所以，$S(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{e}$ 为极小值，它也是最小值.

例 8.16 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0, f(-t)=f(t)$，

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\,f(t)dt$$

（1）证明当 $x\in[-a,a]$ 时，$F'(x)$ 单调增；

(2) x 为何值时 $F(x)$ 取最小值；

(3) 当把 $F(x)$ 的最小值记为 a 的函数 $f(a)-a^2-1$ 时，试求 $f(x)$.

【解】（1） $x\in[-a,a]$，

$$F(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)dt$$

$$F'(x)$$

$$=xf(x)+\int_{-a}^{x}f(t)dt-xf(x)-xf(x)+xf(x)-\int_{x}^{a}f(t)dt$$
$$=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0,\quad x\in[-a,a]$$

故 $F'(x)$ 单调增.

（2） $F'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt\ =\int_{a}^{-x}f(-u)d(-u)+\int_{a}^{x}f(t)dt$

$$=-\int_{a}^{-x}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt=\int_{-x}^{x}f(t)dt$$

因为 $f(x)>0$，$F'(x)=0$ 有唯一解 $x=0$. 由 $F''(0)>0$ 知 $x=0$ 是 $F(x)$ 的极小值点.

（3） $F(0)=2\int_0^a tf(t)dt=f(a)-a^2-1$， $f(0)=1$。对 a 求导得到一阶线性方程

$$2af(a)=f'(a)-2a\ ,$$

$$f(a)=e^{a^2}(\int 2ae^{-a^2}da+C)=Ce^{a^2}-1,$$

由 $f(0)=1,\quad C=2$，得到 $f(x)=2e^{x^2}-1$。

例 8.17 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导。数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：$a<x_n<x_0<y_n<b,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$。

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$。

【解】（泰勒公式，无穷小的运算，或导数概念，极限与无穷小的关系）

由 $f(x)$ 在 x_0 处的可微性，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$ 于是

$$f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+o(x_n-x_0),$$

$f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+o(y_n-x_0)$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right].$$

又因为 $a<x_n<x_0<y_n<b$，所以得到：

$$0\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_0}\right|\qquad 0\le\left|\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|x\frac{o(x_n-x_0)}{x_n-x_0}\right|,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)$。

例 8.18 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(t-[t])dt}{x}$，其中$[t]$表示不超过$t$的最大整数。

【解】考虑充分大的 x： $n<x<n+1$ 时有

$$\int_0^x(t-[t])dt=\int_0^1(t-[t])dt+\int_1^2(t-[t])dt+\cdots\int_{n-1}^n(t-[t])dt+\int_n^x(t-[t])dt$$

$$=\int_n^x(t-[t])dt+\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k(t-[t])dt$$

令 $u=t-(k-1)$，$du=dt$，则有

$$\int_{k-1}^k(t-[t])dt$$

$$=\int_0^1[u+(k-1)-(k-1)]du=\int_0^1udu=\frac{1}{2}$$

而 $\int_n^x(t-[t])dt=\int_0^{x-n}udu<\int_0^1udu=\dfrac{1}{2}$，

因此 $\dfrac{n}{2}<\int_0^x(t-[t])dt<\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2}$，

于是 $\dfrac{n}{2(n+1)}<\dfrac{\int_0^x(t-[t])dt}{x}<\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2})$，

由夹逼定理得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(t-[t])dt}{x}=\dfrac{1}{2}$。

例 8.19 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=-1$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos u)\cos udu=1$，

则当 $x>0$ 时，$\dfrac{d}{dx}[\int_0^x f(\dfrac{\sqrt{x^2-t^2}}{x})dt]=$（ C ）。

(A) 0。　　(B) $f(\cos x)\cos x$。　(C)　1。　　(D) -1。

【解】令 $t = x\sin u$，则有 $\int_0^x f(\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{x})dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\cos u du = 1$，答案：(C)。

例 8.20 设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带 Lagrange 余项的一阶麦克劳林公式公式。

(2) 证明在 $[-a,+a]$ 上至少存在一点 η，使得 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx$。

【解】(1) $\forall x \in [-a,a]$ 有

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$ 其中 ξ (变量)在 $0, x$ 之间。

(2) 由上式两边取积分得到

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(0)xdx + \int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2} f''(\xi)dx \quad = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx$$

由于 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上连续，因此 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上

存在最大最小值 m, M，使 $m \le f''(x) \le M$。

于是由积分估值定理可得到

$$m\int_0^a x^2dx \le \int_{-a}^{a} f(x)xdx \quad = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx \le M\int_0^a x^2dx$$

即有 $m \le \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx \le M$，

对 $f''(x)$ 在 $[-a,+a]$ 上应用连续函数的介值定理，则在 $[-a,+a]$ 上至少存在一点

η，使得 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx$.

注意如下错误做法。由泰勒公式，得

$f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(x_0)x^2$，其中 $x_0 \in [-a,a]$。两边从 -a 到 a 积分，得

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{3}a^3 f''(x_0)$。

错误原因：x_0 在 $0, x$ 之间且与 x 有关。

例 8.21 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+\sin x}dx$.

【解】 $\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+\sin x}dx$

$$= \int_0^1 \frac{dx^n}{1+\sin x} = \frac{x^n}{1+\sin x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n\cos xdx}{(1+\sin x)^2}$$

记 $I_n=\int_0^1\frac{x^n\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$，则 $0<I_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+\sin x}dx=\frac{1}{1+\sin 1}+\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{1+\sin 1}$。

例 8.22　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$a>0$，则

$\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}[f(t+\alpha)-f(t-\alpha)]dt=$ [B]。

(A) $f'(2\alpha)$。　(B) $f'(0)$。　(C) $f'(\alpha)$。　(D) $\frac{1}{2}f'(0)$

【解】由罗必达法则

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{4\alpha^2}\int_{-\alpha}^{\alpha}[f(t+\alpha)-f(t-\alpha)]dt$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{\frac{d}{d\alpha}\left[\int_0^{2\alpha}f(x)dx-\int_{-2\alpha}^{0}f(x)dx\right]}{8\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{2f(2\alpha)-2f(-2\alpha)}{8\alpha}=f'(0)$$

例 8.23　把 $x\to0^+$ 时的无穷小量

$\alpha=\int_0^x\cos t^2dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt$ 排序，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是[　B　]

(A)　α,β,γ.　(B)　α,γ,β.　(C)　β,α,γ.　(D)　β,γ,α.

【解】

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x\cos t^2dt}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{\cos x^2}=0$，可排除(C),(D)选项，另外

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\beta}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{x^2}=\infty$，可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量，故应选(B).

例 8.24　设 $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则[　B　]

(A) $F(x)$在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$在$(-\infty, +\infty)$内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.

【错误分析】先求分段函数 $f(x)$ 的变限积分 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，再讨论函数 $F(x)$ 的连续性与可导性即可。

【正确分析】 $f(x)$ 可积，$F(x)$连续； $f(x)$ 有第一类间断点，$F(x)$不可导，故选(B).

【不需要的详解】

当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_0^x(-1)dt=-x$；

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_0^x 1dt=x$，当 $x=0$ 时，$F(0)=0$. 即 $F(x)=|x|$，

显然，$F(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，但在 $x=0$ 点不可导. 故选(B).

例 8.25 设 $f(x)$ 在$[0,\beta]$上连续且单调减少，若 $0<\alpha<\beta$，证明

$$\alpha\int_0^\beta f(x)dx<\beta\int_0^\alpha f(x)dx。$$

[证]　（方法 1）

$$\alpha\int_0^\beta f(x)dx-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$

$$=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx+\alpha\int_\alpha^\beta f(x)dx-\beta\int_0^\alpha f(x)dx \quad =\alpha(\alpha-\beta)f(\xi_1)-\alpha(\alpha-\beta)f(\xi_2)$$

$$=\alpha(\alpha-\beta)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]<0$$

（方法 2） $\forall x\in[\alpha,\beta]$，令

$$F(x)=\alpha\int_0^x f(t)dt-x\int_0^\alpha f(t)dt,\quad F(\alpha)=0$$

$$F'(x)=\alpha f(x)-\int_0^\alpha f(t)dt \quad =\alpha f(x)-\alpha f(\xi)<0,\ \xi\in(o,\alpha).$$

（方法 3）对 $\int_0^\beta f(x)dx$ 取区间变换 $t=\frac{\alpha}{\beta}x$，

则 $dt=\frac{\alpha}{\beta}dx$，且 $\frac{\beta}{\alpha}>1$，于是

$$\alpha\int_0^\beta f(x)dx-\beta\int_0^\alpha f(x)dx \quad =\beta\int_0^\alpha f(\frac{\beta t}{\alpha})dt-\beta\int_0^\alpha f(x)dx$$

$$=\beta\int_0^\alpha f(\frac{\beta t}{\alpha})dt-\beta\int_0^\alpha f(x)dx \quad =\beta\int_0^\alpha (f(\frac{\beta t}{\alpha})-f(t))dt<0。$$