第 7 讲　定积分的应用 综合例题

7．1　定积分应用的两种思想

- 定积分应用问题的特征：
- 解决定积分应用问题的两种思路：

元素相加法： 利用定积分定义一个量。

分小取近似：$\Delta I \approx f(\xi_i)\Delta x_i$；

求和取极限： $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)dx$

微元分析法： 通过分析末知函数的增量求出其微分的方法。

分小取微分：$\Delta I \approx dI = f(x)dx$；

积分求增量：$I=\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

7．2　定积分在几何方面的应用

7.2.1 平面区域的面积

直角坐标系中平面区域的面积 $D=\{(x,y)|a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}$

$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$。

注：若连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上变号，则 $A=\int_a^b f(x)dx$ 表示正负面积的代数和，有时称为代数面积。

例 7.1 求 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 与 $y=x+\dfrac{3}{2}$ 围成的面积.

【解】 由 $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2} \\ y=x+\dfrac{3}{2}\end{cases}$，解得交点 $a=-1, b=3$。 $A=\int_{-1}^{3}\left(x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{2}\right)dx=\dfrac{16}{3}$。

例 7.2 求非负常数 a，使 $y=x-x^2$ 与 $y=ax$ 所围封闭区域之面积为 $\dfrac{9}{4}$。

【解】 当 $0<a<1$ 时，$\int_0^{1-a}(x-x^2-ax)dx=\dfrac{9}{4}$， $a=1-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}<0$ （舍）

当 $a\ge 1$时，$\int_{1-a}^{0}(x-x^2-ax)dx=\frac{9}{4}$，$a=1+\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

2．参数方程下区域的面积

设区域的边界由曲线

$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$确定，其中 $x(t),y(t)$ 连续可导， $y(t)\ge 0$，则区域的面积为 $A=\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)dt$。

例 7.3 求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$围的区域的面积.

【解】解法一　第一象限部分的边界为

$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$，　$0\le x\le 3$，

$A=4\int_0^1\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}dx=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=6\pi$ 。

解法二　椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的参数方程为

$x=3\cos t$，　$y=2\sin t$，　$0\le t\le\frac{\pi}{4}$，

$A=4\int_0^3 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}y(t)dx(t)\quad=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin t(-3\sin t)dt=6\pi$

3.极坐标系下区域的面积

设区域 D 为（$x=\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi$），$D=\{(x,y)|\alpha\le\varphi\le\beta,0\le\rho\le\rho(\varphi)\}$，

则其面积为 $A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$。

例 7.4　求心形线 $r=a(1+\cos\varphi)$　$(a>0)$所围的面积.

【解】　$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2(\varphi)d\varphi=\int_0^{\pi}r^2(\varphi)d\varphi$

$=4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=\frac{3}{2}\pi a^2$。

例 7.5 已知曲线 $y=a\sqrt{x}$ （$a>0$）与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公切线。

(1)求常数 a 及切点之坐标值

(2)求上述二曲线与 x 轴所围图形的面积

【解】(1) 由 $a\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0}$，$a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0}$，解得 $a=e^{-1}$，切点为（e^2,1）

(2) 面积为 $A=\int_0^{e^2}a\sqrt{x}dx-\int_1^{e^2}\ln\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}e^2-\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}e^2-\dfrac{1}{2}$。

7.1.2 旋转体的体积

1.绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积（小圆台法）

平面区域

$D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$绕 x 轴旋转生成的旋转体的体积为

$$V_x=\int_a^b\pi f^2(x)dx$$

2. 绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积（薄壁筒法）　　平面区域

$D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$

绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积为　$V_y=\int_a^b 2x\pi f(x)dx$

例 7.6 求由曲线 $y=\sqrt{2-x^2},y=\sqrt{x}$ 及 y 轴所为平面区域绕 x 轴及绕 y 轴旋转生成的旋转体的体积.

【解】 $V_x=\int_0^1\pi[(2-x^2)-x]dx=\dfrac{7}{6}\pi$，

$$V_y=\int_0^1 2\pi\left(\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{20\sqrt{2}-22}{15}\pi$$

例 7.7　设常数$0<a<1$，直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 A_1，他们与直线 $x=1$所围成的图形面积为 A_2。

(1)　试确定a的值，使 A_1+A_2 达到最小，并求出最小值；

(2)　求该最小值所对应的图形绕 x 轴旋转一周所生成旋转体的体积。

【解】(1) $A_1=\int_0^a(ax-x^2)dx=\dfrac{1}{6}a^3$，

$$A_2=\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}a^3$$

$$A=A_1+A_2=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3},$$

$A' = a^2 - \frac{1}{2}$， $A'' = 2a > 0$，当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，

A 取到最小值 $A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$。

（2） 用小圆台法

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi[(\frac{x}{\sqrt{2}})^2 - (x^2)^2]dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \pi[(x^2)^2 - (\frac{x}{\sqrt{2}})^2]dx = \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi。$$

例 7.8 求曲线 $y = \ln x,\ (2 \le x \le 6)$ 上的一条切线，使该切线与直线 $x = 2, x = 6$ 所围成平面图形面积最小。

【解】求曲线段 $y = \ln x,\ (2 \le x \le 6)$ 的一条切线，使该切线与直线 $x = 2, x = 6$ 及此曲线段所围平面图形的面积最小。

【解】设切点为 x_0，则切线方程为 $y = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \ln x_0$，该切线与直线

$x = 2, x = 6$ 所围成平面图形面积为

$$S(x_0) = \int_2^6 [\ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \ln x]dx$$

$$= 4\ln x_0 + \frac{16}{x_0} - 6\ln 6 + 2\ln 2$$

由 $S'(x_0) = 0$，得 $x_0 = 4$。 又有

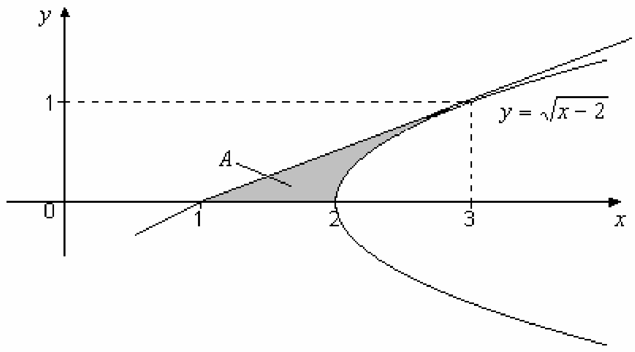
$$S(2) = 4\ln 2 + 8 - 6\ln 6 + 2\ln 2,$$
$$S(x_0) = 8\ln 2 + 4 - 6\ln 6 + 2\ln 2,$$
$$S(6) = 4\ln 6 + \frac{8}{3} - 6\ln 6 + 2\ln 2,$$

所以 $S(x_0)$ 最小，故所求切线方程为 $y = \ln 4 + \frac{1}{4}(x - 4)$.

例 7.9 过点 $(1,0)$ 作曲线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述曲线及 x 轴围成一平面图形 A。

（1）求 A 的面积；

（2）求 A 绕 x 轴旋转一周所成旋转体体积。



【解】(1) 设切点坐标为 (x_0, y_0)，则在此点的切线斜率为 $y'|_{x=x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$

在此点的切线方程为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)+\sqrt{x_0-2}$$

把点 $(1,0)$ 代入上式得 $x_0 = 3$，切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$，

则 $A=\int_0^1[(y^2+2)-(2y+1)]dy=\dfrac{1}{3}$

(2) $V_x=\pi\int_1^3[\frac{1}{2}(x-1)]^2dx-\pi\int_2^3(\sqrt{x-2})^2dx=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{6}\pi$

7.1.3 光滑曲线的弧长

1．直角坐标系中的光滑曲线 $y=f(x),\quad a\le x\le b$ 的弧长为 $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$。

2．参数方程下

$x=x(t), y=y(t),\quad \alpha\le t\le\beta$ 的弧长为 $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2++[y'(t)]^2}dt$。

3．极坐标系下光滑曲线 $\rho=\rho(\varphi),\quad \alpha\le\varphi\le\beta$ 的弧长为 $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)++[\rho'(\varphi)]^2}d\varphi$。

例 7.10　求心形线 $r=a(1+\cos\varphi)\quad(a>0)$ 的弧长.

【解】 $l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}d\varphi\ =a\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}d\varphi$

$$=2a\int_0^\pi 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=8a。$$

7.1.4 旋转体的侧面积

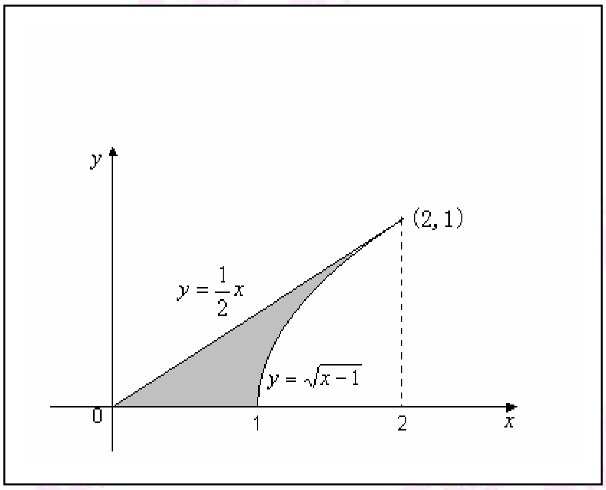
1．直角坐标系中曲线 $y = f(x),\quad a \le x \le b$ 绕 X 轴旋转生成的旋转体的侧面积为

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx。$$

2．参数方程下曲线 $x = x(t), y = y(t),\quad \alpha \le t \le \beta$ 绕 x 轴旋转成的侧面积为

$$A = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + +[y'(t)]^2}dt。$$

例 7．11 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求此曲线，切线及 x 轴为成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积．



【解】 可以求得切线为 $y=\frac{1}{2}x$，切点为 $(2,1)$．

旋转体表面积由两部分组成：

由曲线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为 $A_1 = 2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+y'^2}dx = \pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$。

由切线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为

$$A_2 = 2\pi\int_0^2 \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{5}}{2}dx = \sqrt{5}\pi$$

所以旋转体表面积 $A = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$。

例 7．12 设外旋轮线的方程为

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}(0 \le t \le 2\pi, a>0)，$$

（1）求它绕 X 轴旋转一周生成的体积与侧面积；

（2）求它绕 y 轴旋转一周生成的体积与侧面积。

【解】（1）体积为

$$\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos t^2-\cos^3 t)dt$$

$=5\pi^2 a^3$。

侧面积为

$$2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt = 2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt = 8\pi a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$=-16\pi a\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})d(\cos\frac{t}{2})=\frac{64}{3}\pi a^2$$

（2）绕 y 轴旋转体积与侧面积分别为

体积： $\pi\int_0^{2\pi} a^2(t-\sin t)^2 a\sin t dt = 6\pi^3 a^3$，

侧面积：$2\pi\int_0^{\pi} x\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt = 2\pi\int_0^{\pi} a(t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}dt = 16\pi^2 a^2$

7.2 定积分的物理应用

1．平面图形的形心

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则平面图形

$D=\{(x,y)|a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}$ 的形心为

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x[g(x)-f(x)]dx}{\int_a^b[g(x)-f(x)]dx} \quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[g^2(x)-f^2(x)]dx}{\int_a^b[g(x)-f(x)]dx}$$

例 7．13　求半径为 R 的半圆板的形心．

【解】 设半圆板的圆心在原点，由对称性，

$$\bar{x}=0 \,.\, \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{4}{3\pi}R\,.$$

例 7．14 假设区域 D 由曲线

$y=px^3(y>0, P>0)$ 及其过点 $(1,p)$ 的切线与 x 轴围成，设此区域的形心为 (X,Y)，

（1）求 X 的值；

（2）求 p 的值，使 D 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转体体积为 $V_y=\frac{7}{135}\pi$。

【解】（1） $y'\big|_{x=1}=3px^2\big|_{x=1}=3p$，

切线为 $y=p+3p(x-1)$。与 x 轴交点为 $(2/3,0)$，

$$A=\int_0^1 px^3dx-\frac{1}{6}p=\frac{1}{12}p\text{，}$$

$$M_y=\int_0^1 px^3\cdot xdx-\int_{2/3}^1[p+3p(x-1)]xdx$$

$$=\frac{1}{5}p-\int_{2/3}^1(3px^2-2px)dx=\frac{1}{5}p-(1-\frac{8}{27}-1+\frac{4}{9})p=\frac{7}{135}p$$

$$X=\frac{84}{135}=\frac{28}{45}\text{。}$$

(2) $V_y=\frac{1}{3}\pi[1^1 3p-(\frac{2}{3})^2\cdot 2p]-\pi\int_0^p\frac{y^{2/3}}{p^{2/3}}dy$

$$=\frac{1}{3}\pi[1^1\cdot 3p-(\frac{2}{3})^2\cdot 2p]-\pi\int_0^p\frac{y^{2/3}}{p^{2/3}}dy$$

$$=\frac{1}{3}\pi[1^1\cdot 3p-(\frac{2}{3})^2\cdot 2p]-\frac{3\pi}{5}p=\frac{14}{135}\pi p$$

令 $\frac{14}{135}\pi p=\frac{7}{135}\pi$，得到 $p=\frac{1}{2}$。

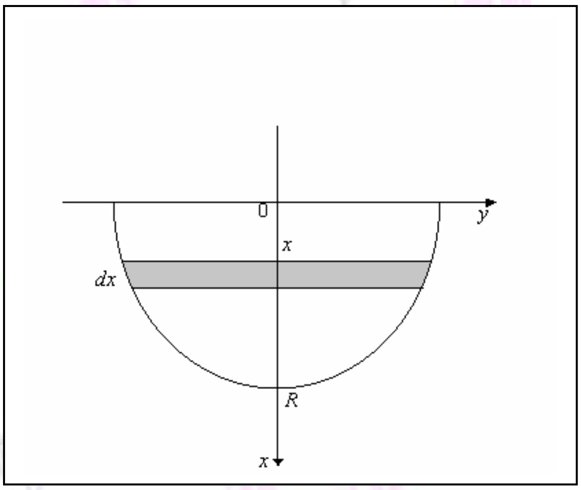
或：由古耳金定理得到 $V_y=2\pi XA=2\pi\frac{84}{135}\cdot\frac{1}{12}p=\frac{14}{135}\pi p=\frac{7}{135}\pi$， $p=\frac{1}{2}$。

2．压力问题

同一深度的各方向的压强相等，小微元的压力微元为 $dp=gh\cdot dA$，

其中 h 为该小微元离液面的高度， g 为重力加速度，dA 为该小微元的面积.积分可得压力.

例 7.15 将半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合,水的密度为本 1,求闸门受的压力.



【解】 以水平面为 y 轴，垂直向下为 x 轴建立坐标系，

$dp=2x\sqrt{R^2-x^2}dx$，其中 R 为半径.

压力 $p=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{2}{3}R^3$

2．引力问题

例 7．16 有一长为 L、质量均匀分布、总质量为 M 的细杆，在沿杆所在的直线上，离其一端 O 相距为 a 的 P 处，放有一质量为 m 的

质点，求杆对质点的引力.

【解】 取杆的微元 $[x,$ L ，其对 P 点的引力微元为

$$dF = g\frac{m}{(l+a-x)^2}\cdot\frac{M}{L}dx$$

杆对质点的引力

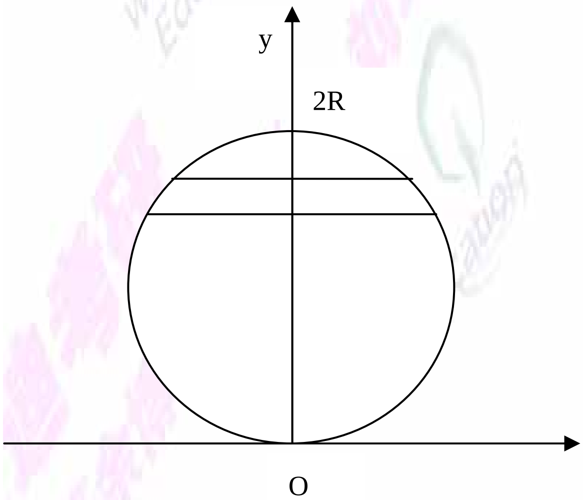
$$F = \int_0^L g\frac{m}{(l+a-x)^2}\cdot\frac{M}{L}dx = \frac{gmM}{a(l+a)}$$

3．变力作功

两个关键量的表达：(1) 导致作功的力，(2) 导致作功的有效路程

例 7．17 将一半径为 R 的圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服水的浮力作的功(设水的密度为 1).

【解】平面曲线为 $x^2+(y-R)^2=R^2$，



取厚度为 Δy 的水平薄片，其受水的浮力微元为 $dF=\pi x^2 dy$，导致作功的有效行程为 $(2R-y)$，因此功的微元（元功）为

$dW=\pi x^2(2R-y)dy$ ，所作功为

$$W=\pi\int_0^{2R}\left[R^2-(y-R)^2\right](2R-y)dy=\frac{4}{3}\pi R^4 \text{（公斤米）。}$$

例 7.18　一圆锥形油罐高 10m，上方开口直径为 10m,油面高度为 8m，油的密度为

480kg/ m^3 ,问将罐内的油全部抽出至罐外需作多少功。

【解】建立坐标如图，圆锥侧母线为 $y=2x$，沿 y 轴方向将圆锥分割成小圆台，

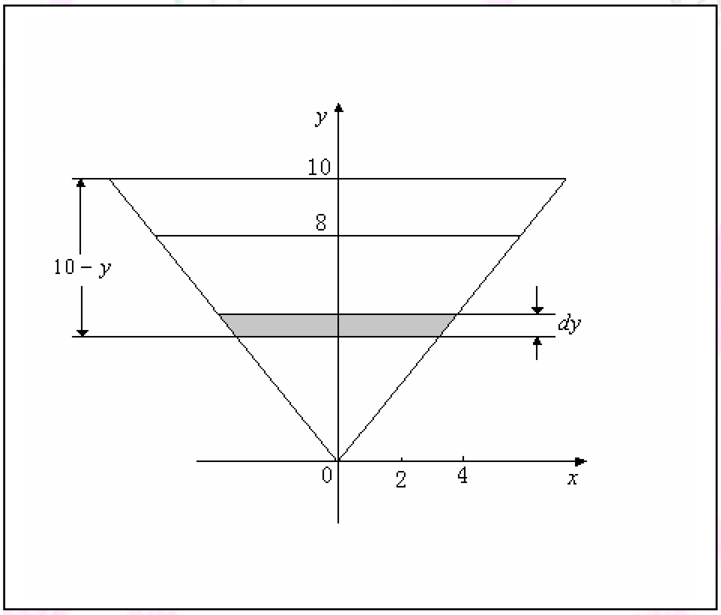
体积微元为 $dv=\frac{\pi}{2}y^2dy$，

质量微元为 $dm=480\cdot\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2dy$，导致作功的有效行程为 $(10-y)$ 米，

因此功的微元（元功）为 $dw=480(10-y)\pi\frac{y^2}{4}dy$，

所作功为 $w=\int_0^8 480(10-y)\pi\frac{y^2}{4}dy$

$=120\pi\int_0^8(10y^2-y^3)dy=8192\pi(kgm)$。



7.3 定积分综合问题

例7.19 求由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 确定平面图形绕直线 $x=2$ 旋转而成的旋转体体积 V。

【解】（方法法 1）记 $x_1=1-\sqrt{1-y^2}, x_2=y$，

$$\begin{cases}x^2+y^2=2x\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

$$dv=[\pi(2-x_1)^2-\pi(2-x_2)^2]dy=\pi[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2]dy$$

$$V=\int_0^1 dv=\pi\int_0^1[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2]dy=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi$$

（方法 2 记 $y_1=x,\ y_2=\sqrt{2x-x^2}$，

$$dv=2\pi(2-x)(y_2-y_1)dx=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$$

$$V=\int_0^1 dv=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi$$

例 7.20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负且单调增加，(X,Y) 为区域 $D=\{(x,y)\in R^2\,|\,a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$ 的形心，证明 $x\ge\dfrac{a+b}{2}$。

【思路】本题要证

$$X=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\ge\frac{a+b}{2}，即证\ I=\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx\ge 0\,.$$

（1） 将 b 视为变量，引入变上限的积分 $F(x)$，证明 $F(x)\ge 0$，

这便是（方法 1）；将二个积分合并为一个积分号，再插入分点 $\dfrac{a+b}{2}$，把积分拆分为两个区间上的积分，利用 $f(x)$ 单调性对积分估计正负号，形成（方法 2）；利用积分中值定理对积分进行估计，便形成（方法 3）。

【证】（方法 1） 令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\dfrac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，

则 $F(a)=0$，

而 $F'(x)=xf(x)-\dfrac{a+x}{2}f(x)-\dfrac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$

$$=\frac{1}{2}(x-a)f(x)-\frac{1}{2}f(\xi)(x-a)=\frac{1}{2}(x-a)\big(f(x)-f(\xi)\big).$$

其中 $\xi\in(a,x)$，又 $f(x)$ 单调增加，因而 $F(x)>0$，令 $x=b$，则不等式(1)成立。

（方法 2）考虑（1）式中的积分合并后得到

$$I=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$

$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$

将上述等号右端第一个积分记为 I_1， $f(x)$ 单调增加，则

$$0 \le f(x) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad x-\frac{a+b}{2}<0.$$

由积分的保序性（注意被积函数为负），因此

$$I_1 \ge \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx.$$

（2）再考虑前面等号右端中的第二个积分，

记为 I_2，注意 $f(x) \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，

$x-\frac{a+b}{2}>0$，由保序性又有

$$I_2 \ge \int_{\frac{a+b}{2}}^{a} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx.$$

（3）将同向不等式（2）和（3）相加，则有

$$I = I_1 + I_2 \ge f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx = 0.$$

（4）于是不等式（1）得证。

（方法 3）对（方法 2）中的 I_1 与 I_2，注意到 $x-\frac{a+b}{2}$ 在两个积分号内分别保持定号，而 $f(x)$ 连续，由积分中值定理则有

$$I_1 = f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx = -\frac{1}{8}(b-a)^2 f(\xi_1)$$

$$I_2 = f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx = -\frac{1}{8}(b-a)^2 f(\xi_2)$$

其中 $\xi_1\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$，

即有 $\xi_2 > \xi_1$，由 $f(x)$ 的单调性，则有 $f(\xi_2) \ge f(\xi_1)$，于是

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{8}(b-a)^2 (f(\xi_2) - f(\xi_1)) \ge 0.$$

例 7.21　设 $S(x)$ 连续，$S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$，

（1）当 n 为正整数时，且 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，证明 $2n \le S(x) \le 2(n+1)$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

【解】(1) $|\cos x|\ge 0$，当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时，$S(x)$ 为增函数，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt\le S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt,$$

注意到 $|\cos x|$ 以 π 为周期，$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2n$，

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2(n+1)$ 于是得到

$$2n\le S(x)\le 2(n+1)。$$

(2) 当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时，

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{S(x)}{x}\le\frac{2(n+1)}{n\pi},$$

令 $n\to\infty$，由夹逼准则得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}。$$

例 7.22 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$，试证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f(\xi)$，$x=a$ 所围成的图形面积，S_1 是由曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f(\xi)$，$x=b$ 所围成平面图形 S_2 的 3 倍.

【解】 在 (a,b) 内取一点 t，则

$$S_1=S_1(t)=\int_a^t(f(t)-f(x))dx,\quad S_2=S_2(t)=\int_t^b(f(x)-f(t))dx,$$

令 $F(t)=S_1(t)-3S_2(t)=\int_a^t(f(t)-f(x))dx-3\int_t^b(f(x)-f(t))dx$，

则只须证明 $F(t)$ 在 (a,b) 有且仅有一个零点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$。

注意到由 $f'(x)>0$，于是 $f(t)$ 在 (a,b) 内单调增加，由积分估值定理可得

$F(a)<0$，且 $F(b)=\int_a^b(f(b)-f(x))dx>0$。所以 $F(t)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点。

另由 $f'(x)>0$，考察 $F(t)$ 在 (a,b) 内的单调性。

$$F'(t)=f(t)+(t-a)f'(t)-f(t)-3(b-t)f(x)+3(b-t)f(t)$$

$$=(t-a)f'(t)+3(b-t)[f(t)-f(x)]$$

$$=(t-a)f'(t)+3(b-t)f'(\xi)>0$$

其中$\xi\in(t,x)$。于是$F(t)$在(a,b)内单调增加，最多有一个零点。

综合上述分析，所以$F(t)$在(a,b)有一个零点$\xi\in(a,b)$,使得$F(\xi)=0$。

例 7.23

例 7.24 设有三角形闸板，两直角边和为l将其竖直放入水中，使一直角与水面重合，另一直角边垂直向下，问两直角边成何比例时，三角形闸板承受水压力最大？设水的密度为 1，求出此最大压力.

【解】以垂直向下直角边顶点为坐标原点，垂直向上方向为y轴，$x-y$平面与三角板所在平面相平行建立坐标系，并设水平直角边与垂直向下直角边的边长分别为a 与 ka，则有 $a+ka=l$，斜边所在直线方程为$y=kx$.

记$P(k)$为闸板承受的水压力，取横向分割，xdy表示面积，$ka-y$为水深，则有微分关系

$dP(k)=x(ka-y)dy=k^2(ax-x^2)dx$ 于是

$$P(k)=k^2\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{k^2a^3}{6}=\frac{k^2l^3}{6(k+1)^3}\quad P'(k)=\frac{(2k-k^2)l^3}{6(k+1)^4},$$

解得驻点$k=2$，且$P'(k)$在驻点两则

变号(先正后负)，因此最大压力为$P(2)=\dfrac{2l^3}{81}$。