

基础班微积分第 6 讲 定积分的概念与计算

6.1 定积分的概念与性质

定积分基本概念、方法与主要知识点

* 概念：定积分作为和式的极限，积分中值定理，保序性与估值定理，定积分是一个数。

* 方法：凑微分法，分部积分，回归法，变量替换，区间变换。

* 积分等式与不等式的证明。

6.1.1 定义

定义 6.1 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上有定义，且有界，若：

(1) 任意分割区间 $[a, b]$ ：取点列 x_0, x_1, \dots, x_n ：记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ， $\lambda = \max_i \|\Delta x_i\|$ ；

(2) 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，

(3) 作和式 $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 。

(4) 若极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = s$ 存在，且极限值与区间 $[a, b]$ 分割的任意

性和 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 取值的任意性无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，该极限

值 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = s$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分，记作

$$I_f(a, b) = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = s$$

a, b 分别称为积分的下、上限， $f(x)$ 称为被积函数， x 称为积分中间变量，定积分的值与积分中间变量的符号无关，即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt。$$

6.1.2 函数的可积性条件

定理 6.1 函数在有界闭区间 $[a, b]$ 可积的必要条件：，是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

定理 6.2 函数在有界闭区间 $[a, b]$ 可积的充分条件(满足下列条件之一即可)

(1) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调有界；

(2) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点;

(3) $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

定积分定义在考研中的应用 利用积分和式求特定极限 (见后述例题)

6.1.3 定积分的性质及常用结论

$$(1) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(2) 对积分区间的可加性: $\forall c \in R, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 对被积函数满足线性性:

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

保序性 (保号性): 若可积函数 $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

若可积函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

特别, 若非负连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒为零, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

(4) 估值定理: 若可积函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $m \leq f(x) \leq M$, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

进一步, 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负可积, 则 (称为比较性质)

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

(5) 积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上取定号且可积,

$$\text{则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

特别, $g(x) \equiv 1$ 时, $\exists \xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, 或

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi) = \overline{f}_{[a,b]}(x) \quad (\text{平均值})$$

事实上还可进一步证明 $\exists \xi_0 \in (a, b)$, 使上述结论成立。

(8) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是可积的奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上是可积的偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 。

(9) 若 $f(x)$ 是可积的周期函数, 切周期为 T , 则对任意是实数 a 必有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

(10) 若连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 。

(证明方法 1: 由中值定理; 证明方法 2: 由连续函数的保号性)

(11) 若非负连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则 $\forall x \in [a, b], f(x) \equiv 0$ 。

(证明方法: 由连续函数的保号性与积分的保号性反证)

例 6.1 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)dx$, 则 (A)。

(A) $I_1 < 1 < I_2$ 。 (B) $I_1 > 1 > I_2$ 。 (C) $I_1 = I_2$ 。 (D) $I_1 > I_2 > 1$ 。

【解】当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin x < x$, 且 $\sin x$ 为增函数, 于是 $\sin(\sin x) < \sin x$,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

而 $\cos x$ 为减函数, 则有 $\cos(\sin x) > \sin x$, 于是

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 > I_1。$$

例 6.2 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$ 的范围。

【解】 $\max_{x \in [0, 2]} (x^2 - 2x) = 0$, $\min_{x \in [0, 2]} (x^2 - 2x) = -1$, 因此

$$2e^{-1} = \int_0^2 e^{-1}dx \leq \int_0^2 e^{x^2-2x}dx \leq \int_0^2 e^0 dx = 2$$

例 6.3 设 $M = \int_{-1}^1 x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})dx$, $N = \int_{-1}^1 \frac{x^3 + |x|}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $P = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx$,

则(A)。

(A) $P < M < N$ 。 (B) $M < N < P$ 。 (C) $M < P < N$ 。 (D) $N < P < M$ 。

【解】由于 M 为奇函数在对称区间的积分, 故为 0;

$$N = 2 \int_0^1 \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = 2(\sqrt{2}-1) > 0, \quad P = -2 \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx < 0$$

所以 $P < M < N$ 。

6.2 牛顿—莱布尼兹公式与定积分的计算

6.2.1 牛顿—莱布尼兹公式及其应用

定理 6.3 牛顿—莱布尼兹公式

若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则存

在常数 C , 使 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad \forall x \in [a, b]$ 或

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - C = F(b) - F(a) \stackrel{\Delta}{=} F(x) \Big|_a^b \quad \text{上述公式称为牛顿—莱布尼兹公式.}$$

特别还有

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

牛顿—莱布尼兹公式使得定积分的计算转化为求不定积分问题, 或求原函数问题。

利用牛顿—莱布尼兹公式, 我们可以通过不定积分求的定积分的值。一般可直接用凑微分法、换元法和分部积分法计算定积分。

例 6.4 求 $\int_0^2 |x-1| dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int_0^2 |x-1| dx &= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 1 \end{aligned}$$

注: 对于分段定义的函数, 定积分计算应特别注意分段积分。

例 6.5 求 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int_0^\pi \sqrt{1-\sin x} dx &= \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx = 4\sqrt{2} - 4. \end{aligned}$$

例 6.6 设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 。

【解】 解法一 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 区间内有第一类间断点, 因此在 $[-1, 1]$ 区间内不存

在原函数, 不能直接用牛顿—莱布尼兹公式. 利用对区间的可加性有

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

在 $[-1,0]$, $[0,1]$ 内分别可以用牛顿—莱布尼兹公式,

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{3}{2}, \quad \int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

故 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0.$

解法二 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 的奇函数, $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0.$

例 6.7 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\cos^2 x} dx.$

【解】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{2-\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

6.2.2 变量替换法

第一换元法的基本思路 (凑微分方法): $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

$$\int_a^b f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = f(\varphi(x)) \Big|_a^b$$

第二换元法的基本思路:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} \text{ 其中要求 } f(x) \text{ 与 } \varphi'(t) \text{ 连续,}$$

$x = \varphi(t)$ 有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 且 $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, $\int f(x)dx = F(x) + C.$

换元法的重要应用之一是区间变换: 以改变积分区间为特定目的的变换:

$$I_f(a,b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x(t))x'(t)dt :$$

$$\text{令 } t = \frac{x-a}{b-a},$$

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_c^d f(x(t))x'(t)dt :$$

$$\text{令 } t = \frac{x-a}{b-a}(d-c) + c,$$

还有反号变换: $t = -x$, 倒数变换: $t = \frac{1}{x}.$

广泛用于积分的合并与拆分。

例 6.8 求 $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ 。

【解】令 $u = -x$, $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int_3^4 \frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$ 。

再令 $u = 2 \sec t$, 则 $du = 2 \tan \sec t dt$,

当 $u = 3$ 时 $t = \arccos \frac{2}{3}$, 当 $u = 4$ 时 $t = \frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} &= \int_3^4 \frac{du}{\sqrt{u^2-4}} = \int_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \tan t \sec t}{2 \tan t} dt \\ &= \int_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{2} \int_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} \right) d \sin t \end{aligned}$$

再令 $y = \sin t$ (可直接利用凑微分法),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\arccos \frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} \right) d \sin t \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} \Big|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(3+\sqrt{5}) + \ln 2. \end{aligned}$$

例 6.9 设 $f(x) - \cos^2 x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ 。

【解】记 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = I$, 再令 $2x = u$, 则 $dx = \frac{1}{2} du$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) du = \frac{1}{2} I.$$

对等式 $f(x) - \cos^2 x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx$ 两边取积分得到,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - \cos^2 x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{I}{2} dx = \frac{\pi}{4} I.$$

$$\text{即 } I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4} I,$$

$$\text{故 } I - \frac{\pi}{4}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{因此 } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{4 - \pi}.$$

例 6.10 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则 (D)

$$(A) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (B) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx,$$

$$(C) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (D) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

【解】 令 $x = \pi - t$, $dx = -dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx &= -\int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= -\int_0^{\pi} tf(\sin t) dt + \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt, \end{aligned}$$

移项得知答案为 D。

6.2.3 分部积分法

设 $f(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

例 6.11 求 $\int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx$.

$$\text{【解】 } \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx = x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e x d(\ln x) = e - \left(-\frac{1}{e}\right) - \int_{\frac{1}{e}}^e dx = \frac{2}{e}.$$

例 6.12 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, 并求 $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

【证】 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$,

$$J_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, (n=2,3,\dots), \text{初值: } J_0 = \frac{\pi}{2}, J_1 = 1.$$

注: 上述结果称为积分的递推公式, 常用递推公式有一步递推或二步递推格式, 应指出的是, 以递推公式表示积分结果, 必须给出初值, 一步递推格式需有一步初值, 二步递推格式需有二步初值, 才能构成完备的计算格式。

上述结果可归纳得到下述实用形式:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot 1 \quad (n=1,2,3,\dots)$$

例 6.13 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x} + \sin^5 x}{8} dx = (\quad) .$

(A) $\frac{\pi}{4}$. (B) $\frac{1}{15}$. (C) $\frac{\pi}{8}$. (D) $\frac{1}{30}$.

【解】 由对称性与积分概念, 立即得知答案

$$I = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{15}, \text{选(B).}$$

例 6.14 已知 $A = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt$, 则 $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} dt = \underline{\hspace{2cm}}$. 答案: $1 - \frac{e}{2} + A$.

【解】 因为 $A = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} dt &= -\frac{e^t}{1+t} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt \\ &= 1 - \frac{e}{2} + A. \end{aligned}$$

例 6.15 设 n 为正整数, 计算 $\int_0^1 x^2 (1-x)^n dx$.

【解】(方法 1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1-x)^n dx &= -\frac{x^2 (1-x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 x (1-x)^{n+1} dx \\ &= -\frac{x(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \Big|_0^1 + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 (1-x)^{n+2} dx \\ &= -\frac{2(1-x)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \Big|_0^1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

(方法 2) 令 $1-x=t$, $dx=-dt$, 则有

$$\int_0^1 x^2(1-x)^n dx = \int_0^1 t^n(1-t)^2 dt = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$$

6.3 变限积分

6.3.1 变上限积分

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\forall x \in [a, b]$, 存在唯一的实数 $\int_a^x f(t)dt$ 与之对应, 因此变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 定义了一个函数, 记作 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 我们称其为变上限积分。

定理 6.4 (1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 定义的函数在 $[a, b]$ 上连续。

注: $F(x)$ 不一定是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则变上限积分 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 定义的函数在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = f(x)$ 。(注意: $F(x)$ 一定是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数)

【证】(1) $\forall x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $\Delta F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$,

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 因此 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 即 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $M > 0$

使得 $|f(x)| \leq M$, 于是 $0 \leq |\Delta F(x)| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq M|\Delta x|$

由夹逼定理可得 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F(x) = 0$, 因此 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续;

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dt \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x) \end{aligned}$$

上式中 ξ 为 x 与 $x + \Delta x$ 之间的一个数, (上述证明用到积分中值定理)

例 6.16 设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 其中 $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2-x^2, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$

则 $F(x)$ 在 $[-1, 2]$ 内 [D]。

(A) 是 $f(x)$ 的原函数. (B) 可导.

(C) 不连续; (D) 连续但不可导.

【解】 $f(x)$ 是在 $[-1, 2]$ 上有第一类间断点的可积函数, 没有原函数。

注: 变下限积分 $\int_x^b f(t)dt$ 有同样的性质。且 $\frac{d}{dx} \left(\int_x^b f(t)dt \right) = -f(x)$

6.3.2 复合变限积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$

定理 6.5 (1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\alpha(x), \beta(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则复合变限积

分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ 是连续函数。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $\alpha(x), \beta(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则复合变限积

分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ 是可导函数, 其导数为

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

6.3.3 变限积分的相关问题

既然变限积分定义了一个函数, 那么一元微分中对函数的所有运算, 对变限积分也同样可以进行。例如, 我们可以处理下列问题:

变限积分定义的函数作为无穷小量阶的估计; 罗必达法则在变限积分定义的函数极限问题中的应用。

变限积分定义的函数的单调性及极值问题;

变限积分定义的函数的泰勒展开;

变限积分定义的函数的积分问题。

关于原函数的一些重要结论

结论 1 连续奇函数之原函数必为偶函数。

结论 2 连续偶函数之原函数必为奇函数与常数之和, 其中只有一个为奇函数 ($C=0$)。

结论 3 连续周期函数之原函数必为周期函数与线性数之和, 且周期不变。

连续周期函数 $f(x)$ 之原函数为周期函数的充要条件是

$$\int_0^T f(x)dx = 0, \text{ 其中 } T > 0 \text{ 为周期。}$$

结论 4 有第一类间断点的函数没有原函数。

结论 5 有第二类间断点的函数可以有原函数。

结论 6 变限积分表示的函数不一定是原函数。

例 6.17 证明连续偶函数之原函数必为奇函数与常数之和。

【证】记 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,

要证存在奇函数 $G(x)$ 使得 $F(x) = G(x) + C$

其中 $F'(x) = f(x)$, C 为常数。

设 $G(x) = \int_0^x f(t)dt$, 要证 $G(x)$ 满足

$$G(-x) = -G(x) ,$$

显然 $F(x) = G(x) + C$, 其中 $f(-x) = f(x)$, 因此

$$G(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt , \text{ 令 } u = -t , \text{ 于是得到}$$

$$\begin{aligned} G(-x) &= \int_0^x f(-u)d(-u) \\ &= -\int_0^x f(u)du = -G(x) . \end{aligned}$$

例 6.18 设 $f(x)$ 是连续的周期为 T 的函数, 证明 $\int_a^{T+a} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

【证】证法一 因为 $f(x)$ 是连续函数, 将 a 作为变量,

$$\frac{d}{da} \int_a^{T+a} f(x)dx = f(T+a) - f(a) = 0$$

$\int_a^{T+a} f(x)dx$ 关于变量 a 为常数, 而当 $a=0$ 时,

$$\int_a^{T+a} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = C ,$$

因此 $\int_a^{T+a} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = C$ 对任意的 a 均成立.

证法二

$$\begin{aligned} &\int_a^{T+a} f(x)dx \\ &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+a} f(x)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x-T)dx \\
 &= \int_0^T f(x)dx
 \end{aligned}$$

注: 证法一 要求 $f(x)$ 是连续函数, 证法二仅要求 $f(x)$ 是可积函数.

例 6.19 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是

$g(x)$ 的 ()

(A) 低阶无穷小量. (B) 高阶无穷小量. (C) 等价无穷小量. (D) 同阶但非等价无穷小量.

答案: (B).

例 6.20 设 $f(x), g(x) \in C[0, +\infty)$, $f(x) > 0$, $g(x)$ 单调增加,

$$\text{则 } \varphi(x) = \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} \quad [\quad].$$

(A) 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加. (B) 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少;

(C) 在 $[0, +1)$ 上单调增加, 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少.

(D) 在 $[0, +1)$ 上单调减少, 在 $[1, +\infty)$ 上单调增加.

$$\begin{aligned}
 \text{【解】 由于 } \varphi'(x) &= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2} \\
 &= \frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x) - g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2} > 0,
 \end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 答案: (A).

例 6.21 设 $f(x) > 0$, 在 $[a, b]$ 上连续, 证明函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x [f(t)]^{-1} dt$

在 $[a, b]$ 上有切仅有一个零点.

【证】 $f(x) > 0$, 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且可导.

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$$

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增. 又因为

$$F(a) = \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt < 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0$$

由连续函数零点定理可知, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上有且仅有一个零点.

例 6.22 确定常数 a, b, c 的值, 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \neq 0$$

【解】 首先由分母极限为零, 必有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0. \text{ 于是 } b = 0.$$

$$\text{其次 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c \neq 0,$$

$$\text{必有 } a = 1, \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

例 6.23 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 其反函数为 $g(x)$,

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x, \text{ 求 } f(x).$$

【解】 由等式 $\int_0^{f(x)} g(u) du = x^2 e^x$ 两侧关于

x 求导数, 注意到 $g(f(x)) = x$, 得到

$$xf'(x) = 2xe^x + x^2 e^x, \text{ 限制 } x \neq 0, \text{ 则有 } f'(x) = 2e^x + xe^x,$$

积分得到 $f(x) = (x+1)e^x + C$, 由 $f(0) = 0$ 及

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + C = f(0), \text{ 解出 } C = -1, \text{ 于是 } f(x) = (x+1)e^x - 1.$$

例 6.24 设 $f(x)$ 为连续非负函数, 对所有大于 1 的常数 b , 由 $1 \leq x \leq b$ 及

$$0 \leq y \leq f(x) \text{ 围成区域的面积为 } \sqrt{b^2 + 1} - \sqrt{2}, \text{ 求 } f(x).$$

【解】由 $\int_1^b f(x)dx = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{2}$ 得 $\int_1^x f(t)dt = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$,

将上式两边对 x 求导得 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

例 6.25 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数, 且 $F(x) = \int_0^x (\sin t - 2t) \cdot f(-t)dt$,

则 $F(x)$ 是 [A].

(A) 偶函数 (B) 奇函数 (C) 周期函数 (D) 以上三种函数都不是

6.4 含有参数的积分

积分号内含有参数的问题是一类重要题型, 这类问题往往需要对参数求导数. 典型方法有两个:

- (1) 当参数以因子形式出现在积分号内时, 则将含参数的因子移到积分号外面,
- (2) 如无法将含参数的部分移到积分号外面, 则引入变量替换.

例 6.26 $\frac{d}{dx} \int_0^x \cos(2x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】令 $2x-t=u$, $dt=-du$, 则

$$I(x) = -\int_{2x}^x \cos u^2 du = \int_x^{2x} \cos u^2 du. \quad I'(x) = 2\cos(2x)^2 - \cos x^2.$$

例 6.27 已知连续函数 $f(x)$ 满足等式 $\int_0^1 f(tx)dt = 2f(x) - x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】因为首先处理参数, 令 $tx=u$, $dt=du$, 于是 $\int_0^1 f(tx)dt = \int_0^x f(u) \frac{1}{x} du$,

$$\int_0^x f(u)du = 2xf(x) - x^3,$$

两边关于 x 求导并整理得 $2xf'(x) + f(x) = 3x^2$.

当 $x \neq 0$ 时, 解 $f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{3}{2}x$ 得 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(C + \frac{3}{5}x^2\sqrt{x})$,

由于 $f(0)=0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 所以 $C=0$, 即 $f(x) = \frac{3}{5}x^2$.

例 6.27 设 $f(x)$ 为已知可导奇函数, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,

则 $\frac{d}{dx} \int_x^{x-f(x)} xg(t-x)dt = (A)$.

(A) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt + x^2 f'(x)$. (B) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt - x^2 f'(x)$.

(C) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt + xf'(x)$. (D) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt - xf'(x)$

【解】记

$$I(x) = \int_x^{x-f(x)} xg(t-x)dt = x \int_x^{x-f(x)} g(t-x)dt \text{ 对上式中的积分令}$$

$$t-x=u, \quad dt=du, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= x \int_0^{-f(x)} g(u)du \quad I'(x) = \int_0^{-f(x)} g(u)du + xg(-f(x))(-f'(x)) \\ &= \int_0^{-f(x)} g(u)du + xg(f(x))(f'(x)) = \int_0^{-f(x)} g(u)du + x^2 f'(x) = (A) \end{aligned}$$

例 6.28 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+e^t} dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解】答案: 0. $\exists X > 0$, 使当 $x > X > 0$ 时,

由初等函数 ($e^x, \ln x$) 性质, $\exists X > 0$, 使当 $x > X > 0$ 时, 有

$$0 < \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+e^t} dt < \int_x^{2x} \frac{\ln 2x}{1+e^x} dt = \frac{x \ln 2x}{1+e^x},$$

应用夹逼定理得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+e^t} dt = 0.$

6.5 积分综合例题

例 6.29 已知连续曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ ($a \neq 0$) 对称, 则

$$\forall c \in R, \int_{-c}^c f(a-x)dx = (\quad)$$

(A) $2 \int_0^c f(2a-x)dx$. (B) $2 \int_{-c}^0 f(2a-x)dx$. (C) $2 \int_0^a f(c-x)dx$. (D) 0.

【解】由几何意义可得知选(D). 曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ ($a \neq 0$) 对称.

以下是几个用到区间变换的例题.

例 6.30 已知 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称,

证明 $\int_a^b f(x)dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$.

【证】 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$,

由于 $y = f(x)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称, 对后一积分有

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)dx,$$

令 $t = a+b-x$, 则 $dx = -dt$, 于是得到

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)dx = - \int_{a+b}^a f(t)dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt,$$

所以 $\int_a^b f(x)dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$.

例 6.31 求 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大最小值.

【解】 $f(x)$ 为偶函数, 只需求 $[0, +\infty)$ 上的最大最小值。

令 $f'(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2} = 0$, $x = \sqrt{2}$ 为唯一驻点, 且

当 $0 < x < \sqrt{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x > \sqrt{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 因此 $x = \sqrt{2}$ 为极大值点, 即最大值点。

最大值为 $f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2-t)e^{-t} dt = 1 + e^{-2}$ 。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t} dt = -(2-t)e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 2 - 1 = 1$$

又 $f(0) = 0$, 因此 $x = 0$ 为最小值点, 最小值为 0。

例 6.32 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, $f'(x)$ 非减, 证明

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)].$$

【证】 移项造辅助函数, $\forall x \in [a, b]$ 设 $F(x) = \frac{x-a}{2} [f(a) + f(x)] - \int_a^x f(t) dt$,

$F(a) = 0$, 则只须研究 $F(x)$ 的单调性, 证明 $F(x) \geq F(a) = 0$ 。

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} [f(a) + f(x)] + \frac{x-a}{2} f'(x) - f(x) = \frac{1}{2} [f(a) - f(x)] + \frac{x-a}{2} f'(x) \\ &= \frac{(a-x)}{2} f'(\xi) + \frac{x-a}{2} f'(x) \\ &= \frac{x-a}{2} [f'(x) - f'(\xi)], \quad \xi \in (a, x). \end{aligned}$$

$f'(x)$ 非减, 又 $F'(x) \geq 0$, $F(x) \geq F(a) = 0$ 。

例 6.33 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ 。

【证】 (方法 1)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx,$$

对上述第二个积分令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t - \sin t}{1+(t-\frac{\pi}{2})^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t - \cos t) \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(t-\frac{\pi}{2})^2} \right] dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin t - \cos t) \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi t \right)}{(1+t^2) \left(1+(t-\frac{\pi}{2})^2 \right)} dt < 0,
 \end{aligned}$$

(方法 2)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{1+\xi_1^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \frac{1}{1+\xi_2^2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx
 \end{aligned}$$

其中 $\xi_1 \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\xi_2 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 对上述第二个积分令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则有

$$\begin{aligned}
 I &= \left(\frac{1}{1+\xi_1^2} - \frac{1}{1+\xi_2^2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= \left(\frac{1}{1+\xi_1^2} - \frac{1}{1+\xi_2^2} \right) (1 - \sqrt{2}) < 0
 \end{aligned}$$

例 6.34 方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^2} dt + \int_{\cos \frac{\pi x}{2}}^0 e^{-t^2} dt = 0$ 的根的个数为 (B)。

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【解】 设 $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt + \int_{\cos \frac{\pi x}{2}}^0 e^{-t^2} dt$, 有 $f(0) = \int_1^0 e^{-t^2} dt < 0$,

$f(1) = \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt > 0$, 所以 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$;

又 $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \cdot e^{-\cos^2 \frac{\pi x}{2}} > 0$, 所以有且仅有一个根。

例 6.35 设 $k > 1$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在内 $(0, 1)$ 可导, 且满足

$$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx = 0,$$

证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$ 。

【证】由积分中值定理得: $f(1) = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1)$, $\xi_1 \in (0, \frac{1}{k})$,

设 $\varphi(x) = xe^{1-x}f(x)$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上连续, 在 $(\xi_1, 1)$ 内可导,

且 $\varphi(\xi_1) = \varphi(1) = f(1)$, 因此 存在 $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$ 使得

$$\varphi'(\xi) = e^{1-\xi}f(\xi) - \xi e^{1-\xi}f(\xi) + \xi e^{1-\xi}f'(\xi) = 0 \quad e^{1-\xi} \neq 0,$$

于是 $f(\xi) - \xi f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$, 所以 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$ 。

例 6.36 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数; (2) 求 $f(x)$ 的值域。

【解】(1) $f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, 设 $t = u + \pi$, 则有

$$f(x+\pi) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(u+\pi)| du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数。

(2) 因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 注意到 $f(x)$ 的周期为 π , 故只需在 $[0, \pi]$ 上

讨论其值域。因为 $f'(x) = \left| \sin(x + \frac{\pi}{2}) \right| - |\sin(x)| = |\cos(x)| - |\sin(x)|$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$, 且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt = \sqrt{2}$,

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = 2 - \sqrt{2},$$

又 $f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1, f(\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin t) dt = 1$, 因而 $f(x)$ 的最小值是 $2 - \sqrt{2}$,

最大值是 $\sqrt{2}$, 故 $f(x)$ 的值域是 $[2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 。