强化部分

第六课 微积分

第 6 章 三重积分，曲线积分与面面积分

(一) 三重积分

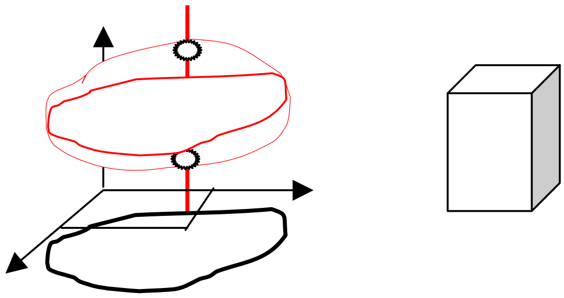
(1) 概念：

● 定义与符号：积分和式的极限，

设 $f : D \subset R^3 \to R$， $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta v_i = \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv$

● 性质：被积函数有界性；可积性；对区域的可加性；运算的单调性；估值与中值定理等。

(2) 计算：

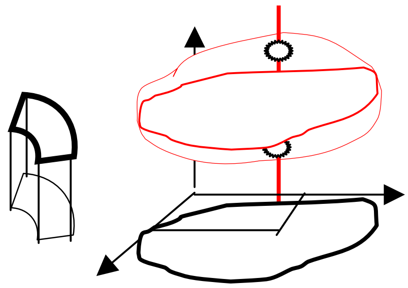


● 在直角坐标系下的计算

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

$$= \int_a^b dz \iint\limits_{D_{xy}(z)} f(x, y, z)dxdy$$



● 在柱坐标系下的计算:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \quad dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

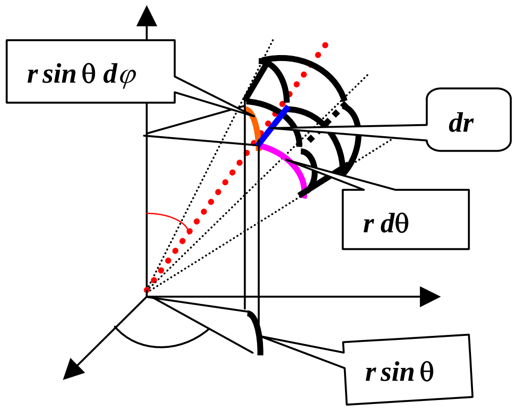
$$D_{\rho\varphi} : \begin{cases} (\rho, \varphi) \in D_{\rho\varphi} = \Omega在\rho\varphi上的投影 \\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y) \end{cases},$$

$$d\sigma = \rho d\rho\, d\varphi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dv =$$

$$= \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho\, d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz$$

$$= \int_a^b dz \iint\limits_{D_{\rho\varphi}(z)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho\, d\varphi$$



● 在球坐标系下的计算

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho \ge 0 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$dv = (r\sin\theta\, d\varphi)(rd\theta)(dr) = r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\varphi \qquad \Omega: \begin{cases} \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \\ \varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta) \\ r_1(\theta,\varphi) \le r \le r_2(\theta,\varphi) \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, rcox\theta)r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\varphi$$

(3) 方法、技巧：

坐标系(直角、柱、球坐标系)的选择；

积分次序(先定后重、先重后定)的确定；

域和函数的对称性的利用；

对区域可加性的利用；

几何、物理意义的利用：体积、质量、形心、引力等。

(4) 三重积分典型例题

1. (88)求由曲面 $S_1: z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M_0(1,-1,3)$ 的切平面，与 $S_2: z = x^2 + y^2$，所围图形体积($\frac{\pi}{2}$)。

2. (89)求 $I = \iiint_{\Omega}(x+z)dv$，$\Omega$由曲面$z = \sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围图形的区域.($\frac{\pi}{8}$)

3. (97)空间区域Ω为平面 $z = 8$ 与由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面所围成，求 $I = \iiint(x^2+y^2)dv$．($\frac{1024}{3}\pi$)

4. (00)设有一半径为 R 的球体，P_0 是该球表面上的一个定点，球面上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k > 0$)，求球体的重心位置。($\left(-\frac{R}{4}, 0, 0\right)$)

5. 计算 $\iiint_{\Omega}\frac{5}{8\pi}(x+y+\frac{1}{\sqrt{z}})dxdydz$， 其中 $\Omega: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 2 \\ x^2+y^2 \le 1 \\ z \ge 1 \end{cases}$ 。

6．(03_1) 设函数 f(x)连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}，\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-1}^{t} f(x^2)dx}，$$

其中$\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le t^2\}$.

(1) 讨论 F(t)在区间$(0,+\infty)$内的单调性.

(2) 证明当 t>0 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t).$

(二) 曲线积分

(1) 向量函数与有向曲线:

平面向量函数: $\vec{F}(x,y)=X(x,y)\vec{i}+Y(x,y)\vec{j}$,

空间向量函数: $\vec{F}(x,y,z)=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$

有向曲线: 表示：参数式$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, $\alpha\le t\le\beta$ $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\\z=z(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$,

切向量： $\vec{\tau}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}$ ； $\vec{\tau}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}$,

弧微分: $dl=\left|d\vec{l}\right|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ ； $dl=\left|d\vec{l}\right|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

弧微分向量：$d\vec{l}=|dl|\vec{\tau}_0=dx\vec{i}+dy\vec{j}=\left(x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}\right)dt$

$$d\vec{l}=|dl|\vec{\tau}_0=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}=\left(x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}\right)dt\ ;$$

方向: 按自变量或参数的增加方向的切向量确定，即 $dt\ge0$ 为正方向

(2) 两种类型的积分及计算

- 仍是积分**和式的极限**，按积分元的性质不同分成二类积分：
- 对弧长、面积的**第一型积分**: $\int\limits_L f(x,y)dl,$, $\int\limits_L f(x,y,z)dl$
- 对坐标的**第二型积分**: $\int\limits_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{l}$, $\int\limits_L \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{l}$ ；
- 用参数表示**化成定积分**。
- 注意**三变换**。

(3) Green 公式： $\int\limits_L Xdx+Ydy=\iint\limits_D \begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ X & Y\end{vmatrix}dxdy=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial x}\right)dxdy$

注意使用公式的条件。

(4) 平面曲线积分与路径无关的条件：

- 在 $X(x,y),Y(x,y)$ 连续的条件下，

线积分与路径无关 $\Leftrightarrow$ 封路径积分为零 $\Leftrightarrow$ 存在单值的原函数;

- 在 $X(x,y),Y(x,y)$ 在单连通域偏导连续的条件下，

线积分与路径无关 $\Leftrightarrow$ 满足可积性条件

(5) 方法、技巧：

- 灵活利用三个公式；
- 域和函数的对称性的利用要小心；
- 对区域可加性的利用；

(6)曲线积分典型例题

1，(89)平面曲线 L 为下半园周 $y=-\sqrt{1-x^2}$ ，则 $I=\int_L\left(x^2+y^2\right)dl$ =（ π ）.

2，(98)设 C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其周长为 a ，则 $I=\int_C\left(2xy+3x^2+4y^2\right)dl$ =（$12a$）.

3，(87) L 为 $x^2+y^2=9$ 正向，则 $I=\oint_L(2xy-2y)dx+\left(x^2-4x\right)dy$ =（ -18π ）

4，(88) C 为 $b^2x^2+a^2y^2=(ab)^2$ 正向，求 $I=\oint_C y(2x-1)dx-x(x+1)dy$.（ 0 ）

5，(99)求 $I=\int_L\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$,其中， a,b 为正常数，

L ：沿 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 从 $A(2a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的曲线。（ $(b-a)\dfrac{\pi a^2}{2}+2a^2b$ ）

6，(89) $I=\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关，其中 $\varphi\in C^1,\varphi(0)=0$,

求 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\varphi(x)dy$.（ $\dfrac{1}{2}$ ）

7．(02_1)设 $I=\int_L\dfrac{1}{y}\left(1+y^2f(xy)\right)dx+\dfrac{x}{y^2}\left(y^2f(xy)-1\right)dy$ ，函数 $f\in C^1(-\infty,+\infty)$ L 是上半平面内有向逐段光滑的曲线，起于 (a,b) 点，上于 c,d 点.

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值。（ $\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$ ，）

8．(00) 计算 $\oint_C \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 C 是以 $(1,0)$ 为中心半径 $R>1$ 的正向园周．(π)

9．若函数 $f(x,y)$ 在 R^2 上偏导数连续，且只有惟一零点 $O(0,0)$；又对任何包含 $O(0,0)$ 的光滑正向闭曲线 C，曲线积分 $\oint_C \frac{xdy-ydx}{f(x,y)}=\alpha$，$\alpha$ 为常数.

（1）证明：对任何不包含 $O(0,0)$ 的光滑闭曲线 C，曲线积分 $\oint_C \frac{xdy-ydx}{f(x,y)}=0$

（2）若 $f(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)$，试求 $\varphi(x)=?$ $\psi(x)=?$

10．(05_1) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数。

(I) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$；

(II) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式。

11，(92) 在力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$ 上第一卦象的点 $M(\xi,\eta,\varsigma)$，问 M 坐标取何值时作功最大。

($M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$)

12 (04_1) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为 $\underline{\frac{3}{2}\pi}$.

13．(03_1) 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，L 为 D 的正向边界．试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

14．已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且关于变量 x 和 y 的周期均为 1，即对任意的点 (x,y)，都有 $f(x+1,y)=f(x,y)$ 和 $f(x,y+1)=f(x,y)$。若 $f(x,y)$ 满足

$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} f(x,y)\Delta f(x,y) dy \geq 0$，试证 $f(x,y)$ 是常函数。

15． $f(x,y)$ 在 R^2 偏导连续，又满足条件：$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$，及 $\forall x \in R,\ f(x,0) > 0$，

证明：$\forall (x,y) \in R^2,\ f(x,y) > 0$.

18．设 $f(x)$ 是正值连续函数，D 为圆心在原点的单位圆，$\partial \boldsymbol{D}$ 为 D 的正向边界，

证明：(1) $\int_{\partial D} xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx = \int_{\partial D} -yf(x)dx + \dfrac{x}{f(y)}dy$；

(2) $\int_{\partial D} xf(y)dy - \dfrac{y}{f(x)}dx \geq 2\pi$。

16．设 $D = \{(x,y) \in R^2 \big| x^2 + y^2 \leq t^2, t > 0\}$，$f(x,y)$ 在 D 上连续，在 D 内可微，$f(0,0) = 1$，D 的正向边界为 C。

若 $f(x,y)$ 在 D 上满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = kf(x,y)$, 试对曲线 $\boldsymbol{C}$ 的外法矢量 $\vec{n}_0$，

求极限 $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t^2} \oint_C \dfrac{\partial f}{\partial n_0} dl$。

（三）曲面积分

(1) 空间有向曲面：三种表示：

显示 $z = f(x,y), (x,y) \in D$；曲面的**法向量**：$\vec{n} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$

隐式：$F(x,y,z) = 0$，　　曲面的**法向量**：$\vec{n} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$

参数式 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$，例如，**球面** $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$，其中 $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$，

球面的单位法向量：$\vec{n}^0 = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

曲面方向：曲面法向的指定一侧，这一侧向，对非封闭面按文字说明；

对封闭面通常以外侧为正向。

面微分向量： $d\vec{S}=dS\,\vec{n}_0=\dfrac{dS\,\vec{n}}{|\vec{n}|}=\cos\alpha\, dS\vec{i}+\cos\beta\, dS\vec{j}+\cos\gamma\, dS\vec{k}$

$$=dy\,dz\,\vec{i}+dz\,dx\,\vec{j}+dx\,dy\,\vec{k}\,,$$

$dS=\dfrac{1}{\cos\gamma}dx\,dy$, $\cos\gamma=\vec{n}_0$ 即 $\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ 的 z 坐标

（2）两种类型的积分及计算

- 仍是积分和式的极限，按积分元的性质不同分成二类积分：
- 对面积的第一型积分：$\iint_S f(x,y,z)dS$
- 对坐标的第二型积分：$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{S}$ ；
- 用参数表示化成二重积分。
- 注意三变换。

（3）基本公式： Gauss，Stokes 公式

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\oiint_S Xdydz+Ydzdx+Zdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv$$

$$=\iiint_\Omega\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)dv=\iiint_\Omega div\,\vec{F}\;dv$$

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{l}=\iint_S\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ X&Y&Z\end{vmatrix}\cdot d\vec{S}=\iint_S\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}=\iint_S rot\,\vec{F}\cdot d\vec{S}\,.$$

（4）三度： $w=f(x,y,z)$，$\vec{F}(x,y,z)=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}$

数量函数的梯度： $grad\;f(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

向量函数的散度： $div\;\vec{F}(x,y,z)=\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}$

向量函数的旋度： $rot\;\vec{F}(x,y,z)=\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ X&Y&Z\end{vmatrix}$

（5） 方法、技巧：

- 灵活利用三个公式；

- 域和函数的对称性的利用要小心；
- 对区域可加性的利用；

(6) 曲面积分典型例题

1，(87)设 S 是平面 $x+y+z=4$ 被园柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则曲面积分 $\iint\limits_S ydS$ 之值是（ A ）

(A) 0，　(B) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$，　(C) $4\sqrt{3}\pi$，　(B) π

2，(00)设 $S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ z\ge 0\end{cases}$，$S_1$ 是 S 在第一卦象的部分，则(C)

(A) $\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1}xdS$，　(B) $\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1}xdS$，

(C) $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1}xdS$，　(D) $\iint\limits_S xyzdS=4\iint\limits_{S_1}xyzdS$

3，(96) S 是有向曲面 $z=x^2+y^2,(0\le z\le 1)$，其法向量与正轴方面夹锐角，求曲面积分：

$\iint\limits_S (2x+z)dydz+zdxdy$　　$(-\frac{\pi}{2})$

4，(88)计算 $\oiint\limits_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧面.（ $4\pi a^2$ ）

5，(88)计算 $\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧面.（$\frac{12}{5}\pi$）

6，(93)计算 $\oiint\limits_S 2xz\,dydz+yz\,dzdx-z^2dxdy$，$S$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围曲面外侧.（ $\frac{1}{2}\pi$ ）

7，(92)求 $I=\iint\limits_S \left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy$，

S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上半球面上侧。　（ $\frac{29}{20}\pi a^2$ ）

8，(91) 计 算　$I=\iint\limits_S -y\,dzdx+(z+1)dxdy$，$S$ 是 柱 面 $x^2+y^2=4$，被 平 面 $x+z=2,z=0$ 截取部分的外侧。(-8π)

9，(90)计算 $I=\iint\limits_S yz\,dzdx+2dxdy$，$S$　$x^2+y^2+z^2=4$ 外侧，在 $z\ge 0$ 部分.（12π ）

10，(98) S 是椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，π 为 S 在点 P 处之切平面，$\rho(x,y,z)$

为原点$O(0,0,0)$到平面π的距离，求计算 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS = ?$（$\frac{3\pi}{2}$）

11，(98)计算 $I = \iint\limits_S \frac{ax\,dydz + (z+a)^2\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$S$是下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，其中$a>0$.（$-\frac{\pi}{2}a^3$）

12． (95) S是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在柱面$x^2+y^2=2x$内的部分，其中$a>0$，求:

（1）$\iint\limits_S zdS$　（$\frac{32\sqrt{2}}{9}$）；（2）$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$.（ 0 ）

13．(97)计算$\oint\limits_C (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中$C$是平面$x-y+z=2$，与柱面$x^2+y^2=1$交线，从$z$轴正方向看去，$C$为顺时针方向。(-$2\pi$)

14，(01)计算$\oint\limits_C (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中$C$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴正方向看去，$C$为逆时针方向。(-24)

15，(01)设有一高度为$h(t)$（t为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$，(设长度单位为厘米，时间单位为小时)， 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9 ）问高为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

（ $V=\frac{\pi}{4}h^3(t), S=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$,100小时 ）

16．(04_1）计算曲面积分　$I=\iint\limits_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$

其中$\sum$是曲面$z=1-x^2-y^2 (z\ge 0)$的上侧.

17．已知函数$f(x)$具有 2 阶连续导数，且对任意的光滑有向封闭曲面Σ，都有

$$\oiint\limits_\Sigma e^x[f'(x)dy\wedge dz-2yf(x)dz\wedge dx-ze^x dx\wedge dy]=0。$$

（1）证明对任意的x都有　$f''(x)+f'(x)-2f(x)=e^x$；

（2）当$f(0)=0,\ f'(0)=\frac{1}{3}$时，求函数$f(x)$的表达式。