基础部分
第四课　概率统计
第 3 章　随机向量及其分布

§3.1 随机向量及其分布

随机向量及随机向量函数(含 *rv* 函数)的分布计算和研究，又一次大大扩展对随机规律的认识和研究能力．而 *rv* 之间的独立性，成为关注的焦点之一．

把握 *rv* 分布和事件发生的概率之间的关系，更一般地，把握 *rv* 联合分布和事件同时发生的概率之间的关系，既可理解变量(向量)规律的研究本质，又可时刻理解 *rv* 间的独立性，还可发现并容易掌握条件分布几个公式．

3.1.1 随机向量及其分布函数的定义

1．定义

定义 3.1.1 设 X_i, i=1,2,⋯,n 是定义在同一个概率空间（$\Omega,\mathscr{F}$,P）上的 *rv*, 则称 X:=（X_1, X_2, ⋯, X_n ）为 n 维随机向量（记为 n 维 $r\vec{v}$ ）．而称 n 元函数

$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) := P(X_1\le x_1, X_2\le x_2, \cdots, X_1\le x_n)$, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in R_n$

为 *rv* X_i，i=1,2,⋯,n 的联合分布函数，或 n 元 *df*，也称为随机向量 X 的分布函数．
令 $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，则定义式子的右方也可写为向量形式 $F_X(x)$.　□

1．联合 *df* 的性质

由联合 *df* 定义，可仿照一元情形立即得到下述性质：

F1)．**非降性**．$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对每一变元为非降；

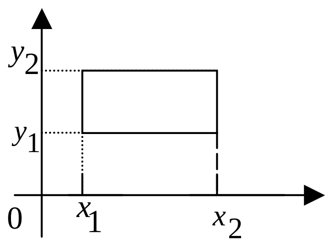
F2)．**右连续性**．$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对每一变元为右连续；

F3)．**边界极端性**．下述极限存在且有值

$$\lim_{x_j\to\infty} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ \forall j=1,\ 2,\ \ldots,n\ ;$$

$$\lim_{x_1\to\infty,\ldots,x_n\to\infty} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1\,.$$

F4)．多维特别性质．以 *df* F(x,y) 为例，对任意的 $x_1< x_2$，$y_1<y_2$，
必有
$F(x_2, y_2)\quad F(x_2, y_1)\quad F(x_1, y_2)+ F(x_1, y_1)\ \ge 0$.



可定义离散型 $r\vec{v}$ 和连续型 $r\vec{v}$．此时分别有离散分布

$p_{i_1i_2\cdots i_n}$ = $P(X_1=i_1,\ X_2=i_2,\ \ldots,\ X_n=i_n)$,

及 n 维 *pdf* $f_X(x)$，它满足

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

这里 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

注意： ① 一个分量的边际分布不再与其它分量有任何关系．

② $f(x,y)\ dxdy$ 是 (X,Y) 在 (x,y) 点微分邻域的概率．

于是，$r\vec{v}$ (X,Y) 取值于二维区域 D 的概率，

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f_{(X,Y)}(x,y)dxdy\ . \tag{3.1.1}$$

③ $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$．当 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点连续，则

$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

3.1.2 两个重要的多元分布

1． 多元均匀分布U_A

定义3.1.2 设A和R_n都是n维L-可测区域(即有n维体积)，$A\subset R_n$，$0<L(A)<\infty$．如 $(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义的n个rv X_i，$i=1,2,\ ...,n$所组成$r\vec{v}$ X的pdf 为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/L(A) & x\in A\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

则称X遵从A上均匀分布．记为 $X\sim U_A$ ． □

2． 多元正态分布$N(a,\Sigma)$

(1) 概念

定义3.1.3 设二维$r\vec{v}$ (X,Y)的pdf 为：对任意 $(x,y)\in R_2$

$$\phi(x,y;\ \mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

其中 μ_1，μ_2，$\sigma_1(>0)$，$\sigma_2(>0)\in R_1$，$|\rho|<1$， 称X遵从参数为 μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2，ρ，的二元正态分布，也记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$．

特别地，称 $N(0,0,1,1,\rho)$ 为二元标准正态分布，其 pdf简记为$\phi(x,y,\rho)$． □

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则其分量的标准化变量

$$X^*=(X-\mu_1)/\sigma_1\text{和}Y^*=(Y-\mu_2)/\sigma_2$$

有联合分布 $(X^*,Y^*)\sim N(0,0,1,1,\rho)$．

记住，标准化和配方，是正态分布计算和证明中常用的基本技术．

(2) 二元正态分布与边际分布的关系

1) 如$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且$(X^*,Y^*)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，从而$X^*\sim N(0,1)$，$Y^*\sim N(0,1)$．

2) (X,Y)和(X^*,Y^*)两者分布中的参数ρ都是不变的．实际上我们有更一般的结果：一个二维$r\vec{v}$各分量的任意线性函数，$U=aX+b,\ V=cY+d,\ ab\neq 0$，则得到新的二维$r\vec{v}$ (U,V)，且$|\rho|$不变的．

3) 联合分布决定边际分布，反之则不然：此时我们无法决定参数ρ，事实上我们更有甚者：由两个一维正态 df，可以组织一个不是正态分布的二维联合分布！

4) 联合分布里的参数ρ是用来刻画 X与 Y之间的联系的．

如果(X,Y)有二元正态分布，则其两个分量独立的充要条件是$\rho=0$，(X^*,Y^*)的结论相同．但在一般分布中，上述结论一般不正确；两个 rv不相关的充要条件见下一讲．

(3) 二元正态分布密度的函数性态

由二元正态 pdf 容易得到二元正态分布的性质：

1) $pdf>0$ 且任意阶导函数为连续的；

2) $\phi(x,y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 关于平面$x=\mu_1$和平面$y=\mu_2$对称，在点 (μ_1,μ_2) 取得最大值$(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\ )^{-1}$，故$\sigma_1$和$\sigma_2$越小、$|\rho|$越接近于1，则此最大值越大．

3.1.3 条件分布及 rv的独立性

1．条件分布

对某固定的$x\in R_1$，$P(X=x)>0$时，条件概率

$$P(Y\le y|\ X=x)=P(X=x,\ Y\le y)\ /\ P(X=x)$$

称为$X=x$条件下Y的条件df，简记为$F_{Y|X}(y|x)$， $\infty<y<\infty$．

当 X是连续型 rv时，用 $(x-\Delta x<X\le x)$代替$(X=x)$，

定义3.1.4 设 X和 Y为 rv，当下述极限存在时

$F_{Y|X}(y|x):=\lim_{\Delta x\to 0}\{P(x-\Delta x<X\le x,\ Y\le y)\ /\ P(x-\Delta x<X\le x)\}$， $y\in R_1$.

称为 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数.

当 (X,Y) 的 pdf $f(x,y)$ 在 (x,y) 点连续，固定 $y\in R_1$，并在该 x 点 $f_X(x)>0$. 则由 H'ospital法则，上式中的极限式

$$=\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv\ /\ f_X(x)=\int_{-\infty}^{y}[f(x,v)/\ f_X(x)]\,dv.$$

可见令 $f_{Y|X}(y|x):=f(x,y)\ /\ f_X(x)$， $f_X(x)>0$.

有 $F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)dv$.

仿上可定义 $F_{X|Y}(x|y)$及 $f_{X|Y}(x|y)$，且可证，条件df[或条件pdf]确为df [或pdf].

2．rv的独立性

定义 3.1.5 设$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$及 $F_j(x_j)$ 分别是$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$及X_j 的df，$j=1,2,...,n$，如

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_1^n F_j(x_j),\quad \forall\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_n,$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为相互独立的.

［ **典型例题** ］

- **二元 df 基本性质**

例 3.1.1 设二元函数 $F(x,y)=\begin{cases}1 & 2x+y\ge 1\\ 0 & 2x+y<1\end{cases}$ 它是二元 df 吗?

- **联合分布与边际分布**

例 3.1.2 于只有 3 个红球 4 个黑球的袋中逐次随机取一球，令

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如第 } i \text{ 次取出红球}\\ 0 & \text{如第 } i \text{ 次取出黑球}\end{cases},\quad i=1,2.$$

试在有放回和不放回两种取球方式下，求X_1和X_2的联合分布．X_1和X_2独立吗？为什么？

【 有放回：

X_1 \ X_2	0	1	$p_{\cdot j}=P(X_2=j)$
0	$\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{49}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\cdot}=P(X_1=i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	

不放回：

X_1 \ X_2	0	1	$p_{\cdot j}=P(X_2=j)$
0	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{42}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{42}$	$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\cdot}=P(X_1=i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	

有放回时X_1和X_2独立；不放回时X_1和X_2不独立.】

例 3.1.3 设 rv$X$ 与 Y 相互独立，下表列出了 $r\bar{v}$ (X,Y) 分布律和关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分已知数值，试将其余数值填入表中的空白处．

$X\backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	1/6			1

例 3.1.4 已知 rv X_1 和 X_2 的概率分布 $X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$，$X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，而且 $P(X_1X_2=0)=1$. 求 X_1 和 X_2 的联合分布；问 X_1 和 X_2 是否独立？为什么？

【X_1 和 X_2 不独立】

$X_2\backslash X_1$	1	0	1	Σ
0				1/2
1				1/2
Σ	1/4	1/2	1/4	1

例 3.1.5 设有 n 个袋子，各装红球 r 只，黑球 b 只及白球 w 只．今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第 2 个袋子再随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续．令

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球} \\ 0, & \text{反之} . \end{cases} ,$$

$$W_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出白球} \\ 0, & \text{反之} . \end{cases} , \quad k = 1, 2, \ldots n$$

试求 1)． R_k 的分布； 2)． (R_1, W_1) 的分布； 3)． $P(W_1=1 | R_2=1)$．

【1) $P(R_k=1)=\dfrac{r}{r+b+w}$，$P(R_k=0)=\dfrac{b+w}{r+b+w}$

2)． $p_{00}=b/(r+b+w)$，$p_{11}=0$，$p_{01}=w/(r+b+w)$，$p_{10}=r/(r+b+w)$．

3)． $w/(r+b+w+1)$ · 】

例 3.1.6 设 (X,Y) 的 pdf 为

$$f(x,y) = c\cdot\exp\{-n(x+y)\}\ I(0<x<y<+\infty) ,$$

其中 n 为已知正整数，c 为待定常数．

1)．求常数 c； 2)．求条件密度 $f_{Y|X}(y|1)$；

3)． X 与 Y 是否独立，为什么？

解 1) 由二维 pdf 性质，

$$1 = \iint_{R^2} f(x,y)\ dxdy = \iint_{0<x<y} c\cdot\exp\{-n(x+y)\}\ dxdy$$

$$= c\int_0^\infty e^{-nx}dx\int_x^\infty e^{-ny}dy = c\int_0^\infty e^{-nx}\times\frac{1}{n}e^{-nx}dx$$

$$= \frac{c}{2n^2}, \qquad c = 2n^2.$$

2）求边际 pdf,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_x^\infty 2n^2 e^{-n(x+y)}dy = 2ne^{-2nx}, \qquad x>0$$

故

$$f_{Y|X}(y|1)=f(1,y)/f_X(1)$$

$$\overset{y>1}{===}2n^2e^{-n(1+y)}/2ne^{-2n}=ne^{-n(y-1)}.$$

而对其余 y，$f_{Y|X}(y|1)$ 为 0.

3）仿 2）求 Y 的边际 pdf

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 2n^2e^{-n(x+y)}dx=$$

$$2ne^{-ny}(1-e^{-ny}),\qquad y>0$$

易见，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),\quad 0<x<y$.故 X 和 Y 不独立.

- ***rv* 的独立性**

例 3.1.7 设 $f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}8xy & 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，问 X 与 Y 是否独立？

解 固定 $x\in[0,1]$，

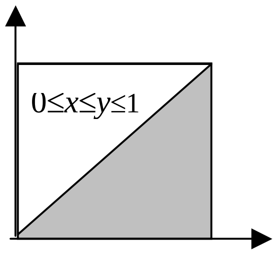
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2)$$

于是　$f_X(x)=4x(1-x^2)\quad I(0\le x\le 1)$

仿上　$f_Y(y)=4y^3\mathrm{I}(0\le y\le 1)$

X 与 Y 不独立.



例 3.1.8 试证如 $r\vec{v}$ (X,Y) 的 pdf $f(x,y)$ 有如下分离变量乘积形式，则 X 和 Y 一定独立.

$$f(x,y)=\begin{cases}g(x)h(y) & a<x<b,\quad c<y<d\\ 0 & \text{其它}\end{cases},$$

其中实数 $a<b,\quad c<d$，并允许取无穷.

§ 3.2　随机向量函数的分布

通过随机向量函数的分布计算和研究，将已经把握的 *rv* 和随机向量的概率规律，扩展到对它们的函数——变化更多的、新的 *rv* 和随机向量的随机规律的认识和把握.

rv 之间的独立性，成为关注的焦点之一.

3.2.1 随机变量的函数的分布

通用公式

$$F_Y(y)=P(g(X)\le y)=\int_{x:g(x)\le y}dF_X(x)$$

$$=\begin{cases}\sum_{j:g(x_j)\le y}p_j(X) & \text{当 } X \text{ 为离散型}\\ \int_{x:g(x)\le y}f_X(x)dx & \text{当 } X \text{ 为连续型}\end{cases}$$

1．离散型 *rv* 函数的分布

例 3.2.1 设 $X\sim P(\lambda)$，试求 $Y=2X\ \ 1$ 的分布.

【解 $P(Y=k)=P(X=(k+1)/2)=\dfrac{\lambda^{\frac{k+1}{2}}}{(\frac{k+1}{2})!}e^{-\lambda}$，$k$ =0，1，2，...　？

解 $P(Y=2k\ \ 1)=P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　k =0，1，2，...，

Y 的分布列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & \cdots & 2k-1 & \cdots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \cdots \end{pmatrix}$ 】

2. 连续型 *rv* 函数的分布

(1) 直接法——利用通用公式：

(2) 连续型的公式法

$y=g(x)$ 是分段严格单调且连续可微：

定理 2.4.1 设 X 有连续的 *pdf* $f_X(x)$，函数 $y=g(x)$ 是严格单调且连续可微，其唯一反函数 $x=h(y)$ 连续可微．则 $Y=g(X)$ 是连续型的，其 *pdf* 为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))\left|h'(y)\right|$$

线性函数情形：

推论 设 X 有连续的 *pdf* $f_X(x)$，$a\neq 0$，则 $Y=aX+b$ 仍是连续型的，其 *pdf* 为

$$\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}.$$

3.2.2 随机向量的函数的分布

离散型 $r\vec{v}$ 函数的情形；

连续型 $r\vec{v}$ 函数的情形：

1．连续型的通用公式(直接法)

$$\boxed{F_{g(X,Y)}(z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy}$$

2．公式法

(1) 一般函数变换

基于多元微积分中变量替换知识，对连续型 $r\vec{v}$ 函数的分布也可建立像上面一维情形的定理(略)．由此及上节结论：*pdf* 为分离变量乘积的形式时分量是相互独立的，可得下面推论．

推论 1 设连续型 X 与 Y 独立，两个一元函数 u，v 都有各自唯一的反函数 x，y，

$$\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(y) \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} x=x(u) \\ y=y(v) \end{cases},$$

且上述四个函数的导函数连续，则 $U=u(X)$ 和 $V=v(Y)$ 仍然独立．

推论 2 设 *rv* X 与 Y 独立，$u(x)$ 和 $v(y)$ 是两个 Borel 函数(常见常用的、在高等数学里遇到的函数都是 Borel 函数)，则 *rv* $U=u(X)$ 和 $V=v(Y)$ 仍然独立．对两个以上独立的 *rv* 的各自 Borel 函数，也仍然是独立的．

作为推论 2 的一个应用，当 X^* 与 Y^* *iid*, $\sim N(0,1)$ 时，可由推论 2 得到 $X=\sigma_1 X^*+\mu_1$ 和 $Y=\sigma_2 Y^*+\mu_2$ 也是独立的．进一步当 X、Y 和 Z 独立时，$X+Y$ 和 Z^2 也是独立的．

(2) 几个重要函数的密度公式

1) *rv* 的和差积商公式

$$\boxed{\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x,x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x)f_Y(x)dx. \qquad (当\ X\ 与\ Y\ 独立) \end{aligned}}$$

2) 最大值与最小值的分布

设 $F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 *df*，而 F_j 和 f_j 分别为 X_j 的 *df* 和 *pdf*．令 $X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

下面求$X_{(n)}$与$X_{(1)}$的分布．

由 *df* 定义，

$$\boxed{\begin{aligned}F_{(n)}(z) &:= P(X_{(n)} \le z) = P(X_1 \le z,\ X_2 \le z,\ \cdots,\ X_n \le z)\\ &= F_{(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)}(z,\ z,\ \cdots,\ z)\end{aligned}}$$

$$F_{(n)}(z) = \prod_{1}^{n} F_j(z) \quad (\text{当诸 } X_j \text{ 独立})$$

$$= [F_1(z)]^n \quad (\text{当诸 } X_j\ iid)$$

$$f_{(n)}(z) = nf_1(z)[F_1(z)]^{n-1} \quad (\text{又当} F_j \text{ 连续可微}).$$

对最小值函数，转而考虑

$$\boxed{P(X_{(1)} > z) = P(X_1 > z,\ X_2 > z,\ \cdots,\ X_n > z)}\ .$$

由于　　$F_{(1)}(z) = 1 - P(X_{(1)} > z)$，故

$$F_{(1)}(z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 >, \cdots, X_n > z)$$

$$= 1 - \prod_{\mathbf{j=1}}^{n}[1 - F_j(z)] \quad (\text{当诸 } X_j \text{ 独立})$$

$$= 1 - [1 - F_1(z)]^n \quad (\text{当诸 } X_j\ iid)$$

$$f_{(1)}(z) = nf_1(z)[1 - F_1(z)]^{n-1} \quad (\text{又当} F_j \text{连续可微}).$$

［ **典型例题** ］

- **连续型 *rv* 函数的分布**

例 3.2.1 设 $X \sim U_{(0,1)}$，求 $Y = -2X + 2$ 的 *pdf*.

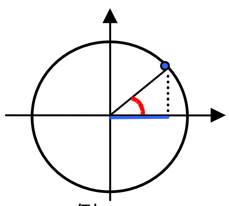
例 3.2.2 设 *rv* X 有连续的 *pdf* $f_X(x)$，求 $Y = X^2$ 的 *pdf*；当 $X \sim N(0,1)$ 时，证明 $Y = X^2$ 的 *pdf* 为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2} \quad I(y > 0)$$

【$h_j(y) = \pm\sqrt{y}$，$y > 0$，$f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right]\ I(y>0)$．代入 X *pdf* 即得】

例 3.2.3 在单位圆周上随机取一点 D，求点 D 横坐标 X 的分布．

【$f_X(x) = 1/\ (\pi\ \sqrt{1-x^2})\quad I(|x|<1)$.】



例 3.2.3

- ***rv* 和的分布**

例 3.2.4（离散卷积） 设 *rv* X，Y 相互独立，分布律分别为 $P(X = k) = p(k)$，$k = 0,1,2,\cdots$；$P(Y = r) = q(r)$，$r = 0,1,2,\cdots$ 证明 *rv* $Z = X + Y$ 的分布律为

$$P(Z = i) = \sum_{k=0}^{i} p(k)q(i-k),\ i = 0,1,2,\ldots .$$

例 3.2.5 设 X、Y *iid*，~ U(0,1)．试求 $X + Y$ 的分布．

【当 $0 \le z < 1$，$F_{X+Y}(z) = z^2/2$；当 $1 \le z < 2$，$F_{X+Y}(z) = 2z - \frac{1}{2}z^2 - 1$，又 $F_{X+Y}(z) = 0$，$z < 0$；$= 1$，$z \ge 2$；$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 \le z < 2 \end{cases}$，而在其余的点处，*pdf* 为 0．】

- **随机向量函数的分布**

例 3.2.6 设 $rv\,X_1,\cdots,X_n$ 是 iid 的，且 $\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ q & r & p\end{pmatrix}$，其中 0 < p <1，0 < q <1，r ≥ 0，p + q + r = 1． 试求下列函数的分布：X_1+X_2、X_1X_2 及 $X_{(1)}:=\min_{1\le k\le n}X_k$

【$X_1+X_2\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ q^2 & 2qr & 2pq+r^2 & 2pr & p^2\end{pmatrix}$，$X_1X_2\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2pq & 1-(p+q)^2 & p^2+q^2\end{pmatrix}$

$X_{(1)}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1-(r+p)^n & (r+p)^n-p^n & p^n\end{pmatrix}$.】

$\equiv\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1-(1-q)^n & (1-q)^n-p^n & p^n\end{pmatrix}$

例 3.2.7 设随机向量（X, Y）的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

1）求 $P(X=2\,|\,Y=2),\ P(Y=3\,|\,X=0)$.

2）求 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布律 .

3）求 $V=\min\{X,Y\}$ 的分布律 .

4）求 $W=U+V$ 的分布律 .

U	0	1	2	3	4	5
p_k	0. 28	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

V	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

W	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

例 3.2.8 设二维 $r\overline{v}$（X, Y）在矩形 $G=\{(x,y)\big|0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的 $pdf\ f(s)$.

【

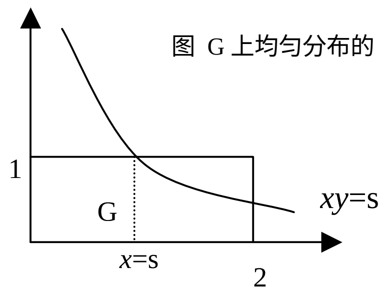


图 G 上均匀分布的 rv 函数

设 0<s<2，曲线 xy = s 与矩形 G 的上边交于点（s,1）; 位于曲线 xy = s 上方的点满足 xy>s，位于下方的点满足 xy <s，于是由几何概型

$$F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}$$

$$=\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\int_s^2\frac{s}{x}dx=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

$f(s)=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s)\quad I(0<s<2)$ 】

- **应用**

例 3.2.9 用两个独立的同类设备 S_1 和 S_2 如图示分别组成串联、并联及备用（也即冷储备）系统．如此类设备的寿命为参数是λ的指数分布，试求系统的寿命分布．

【$2\lambda\exp\{\ \lambda\ u\}\exp\{\ \lambda u\}$，$u>0$ ；$2\lambda\exp\{\ \lambda u\}[1\ \ \exp\{\ \lambda u\}]$，$u>0$ ；$\Gamma(2,\lambda)$】

§3.3 独立性总结

方法 1．由定义及等价定义判断．

方法 2．由条件分布判断．

方法 3．由联合分布的等效形式判断．

方法 4．联合密度有分离变量形式，则分量一定独立

方法 5．联合密度不为 0 的区域不是可分离的，即 X 和 Y 有‘纠缠’，一般不独立．

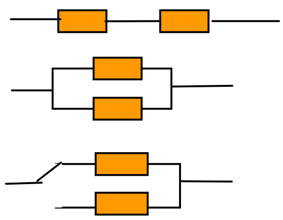
方法 6．关于二元正态，分量独立$\Leftrightarrow\rho = 0$，即分量不相关．

方法 7．关于 rv 的函数的情况，有如下结论：

1）如果 X 和 Y 独立，则 $g(X)$ 和 $h(Y)$ 仍然独立；

2）如果 X 和 Y 独立， 且其函数 $U = u(X, Y)$ 和 $V = v(X, Y)$ 都是 rv，则 U 和 V 可能独立，也可能不独立．

3）随机向量的函数变换应该慎重．



例 3.2.9 不同结构的系统