基础部分

第一课　微积分

第 6 章　定积分的概念与计算

6．1 定积分的概念与性质

定积分基本概念、方法与主要知识点

* 概念：定积分作为和式的极限，积分中值定理，保序性与估值定理，定积分是一个数。
* 方法：凑微分法，分部积分，回归法，变量替换，区间变换。
* 积分等式与不等式的证明。

6.1.1　定义

定义 6。1 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上有定义，且有界，若:

(1) 任意分割区间 $[a,b]$: 取点列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$:

记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\lambda = \max\limits_i \|\Delta x_i\|$;

(2) 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

(3) 若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s$ 存在，且极限值与区间 $[a,b]$ 分割的任意性和 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 取值的任意性无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，该极限值 $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分，记作

$$I_f(a,b) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} S_n = s$$

a,b 分别称为积分的下、上限，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分中间变量，定积分的值与积分中间变量的符号无关，即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt。$$

6.1.2

函数的可积性条件

定理 6。1 函数在有界闭区间 $[a,b]$ 可积的必要条件:，是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

定理 6。2 函数在有界闭区间$[a,b]$可积的充分条件(满足下列条件之一即可)

(1) $f(x)$在区间$[a,b]$上单调有界；

(2) $f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点；

(3) $f(x)$在区间$[a,b]$上连续.

定积分定义在考研中的应用 利用积分和式求特定极限（见后述例题）

6.1.3 定积分的性质及常用结论

(1) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(2) 对积分区间的可加性：$\forall c\in R,\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 对被积函数满足线性性：

$$\int_a^b[Af(x)+Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b g(x)dx$$

保序性（保号性）：若可积函数$f(x)\geq 0,\quad \forall x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0。$$

若可积函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f(x)\geq g(x)$ ，则 $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$。

特别，若非负连续函数$f(x)$在$[a,b]$上不恒为零，则 $\int_a^b f(x)dx>0$。

(3) 若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $|f(x)|$在$[a,b]$上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$$

(4) 估值定理：若可积函数$f(x)$在$[a,b]$上满足$m\leq f(x)\leq M$，则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

进一步，若函数$g(x)$在$[a,b]$上非负可积，则（称为比较性质）

$$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx$$

(5) 积分中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上取定号且可积，则 $\exists\xi\in(a,b),$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

特别，$g(x)\equiv 1$ 时，$\exists \xi \in [a,b],$ 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，或

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi) = \overline{f_{[a,b]}(x)} \text{（平均值）}$$

事实上还可进一步证明 $\exists \xi_0 \in (a,b),$ 使上述结论成立。

(8) 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是可积的奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$；

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是可积的偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$。

(9) 若 $f(x)$ 是可积的周期函数，切周期为 T，则对任意是实数 a 必有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

(10) 若连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$。

（证明方法 1：由中值定理；证明方法 2：由连续函数的保号性）

(11) 若非负连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$，则 $\forall x \in [a,b], f(x) \equiv 0$。

（证明方法：由连续函数的保号性与积分的保号性反证）

例 6.1 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x)dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)dx$，则（A）.

(A) $I_1 < 1 < I_2$。 (B) $I_1 > 1 > I_2$。

(C) $I_1 = I_2$。 (D) $I_1 > I_2 > 1$.

[解] 当 $x \in (0,\frac{\pi}{2})$，$\sin x < x$，且 $\sin x$ 为增函数，于是

$$\sin(\sin x) < \sin x,$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin dx=1,$$

而$\cos x$为减函数，则有$\cos(\sin x)>\sin x$，于是

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1>I_1。$$

例 6．2 估计积分$\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$的范围.

解:

$$\max_{x\in[0,2]}\left(x^2-2x\right)=0,\quad \min_{x\in[0,2]}\left(x^2-2x\right)=-1,$$

$$2e^{-1}=\int_0^2 e^{-1}dx\le\int_0^2 e^{x^2-2x}dx\le\int_0^2 e^0dx=2$$

例 6 . 3 设 $M=\int_{-1}^{1}x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$ ，

$N=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx$，$P=\int_{-1}^{1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx$，

则(A) 。

(A) $P<M<N$。　(B) $M<N<P$。

(C) $M<P<N$。　(D) $N<P<M$。

解：由于M 为奇函数在对称区间的积分，故为 0；

$$N=2\int_0^1\frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}=2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1)>0$$

$$P=-2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx<0$$

所以$P<M<N$。

6.2 牛顿—莱布尼兹公式与定积分的计算

6.2．1 牛顿—莱布尼兹公式及其应用

定理 6。3 牛顿—莱布尼兹公式

若 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，$F(x)$为 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则存在常数C，使$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$，$\forall x\in[a,b]$或

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - C = F(b) - F(a) \overset{\Delta}{=} F(x)\Big|_a^b$ 上述公式称为牛顿—莱布尼兹公式.特别还有

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)。$$

牛顿—莱布尼兹公式使得定积分的计算转化为求不定积分问题，或求原函数问题。.

利用牛顿—莱布尼兹公式，我们可以通过不定积分求的定积分的值。

例 6．4 求$\int_0^2 |x-1|dx$。

解: $\int_0^2 |x-1|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 = 1$$

注：对于分段定义的函数，定积分计算应特别注意分段积分。

例 6．5 求$\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx.$

解: $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx. = \int_0^\pi \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= 4\sqrt{2} - 4.$$

例 6．6 设 $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$，求$\int_{-1}^1 f(x)dx$。

解：解法一　$f(x)$在$[-1,1]$区间内有第一类间断点，因此在$[-1,1]$区间内不存在原函数，不能用牛顿—莱布尼兹公式．利用对区间的可加性有

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

在$[-1,0],[0,1]$内分别可以用牛顿—莱布尼兹公式，

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{3}{2}$$,

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{3}{2}$$

故 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$=0。

解法二 $f(x)$是$[-1,1]$的奇函数，

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$=0.

例 6．7 求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\cos^2 x}dx$。

解：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)\cos x}{1+\cos^2 x}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}dx$。

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{2-\sin^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

可以直接用凑微分法、换元法和分部积分法计算定积分。

6.2.2 变量替换法

第一换元法的基本思路（凑微分方法）：

$$\int_{a}^{b} f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$\int_{a}^{b} f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = f(\varphi(x))\Big|_{a}^{b}$$

第二换元法的基本思路：

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta}$$ 其中

要求 $f(x)$ 与 $\varphi'(t)$ 连续，$x=\varphi(t)$ 有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且 $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$，

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$。

换元法的重要应用之一是区间变换：以改变积分区间为特定目的的变换。

$$I_f(a,b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x(t))x'(t)dt：$$

令 $t=\dfrac{x-a}{b-a}$，

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_c^d f(x(t))x'(t)dt：$$

令 $t=\dfrac{x-a}{b-a}(d-c)+c$，

还有反号变换：$t=-x$，倒数变换：$t=\dfrac{1}{x}$。

广泛用于积分的合并与拆分。

例 6．8 求 $\int_{-4}^{-3}\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$。

解：令 $u=-x$，$\int_{-4}^{-3}\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int_3^4\dfrac{du}{\sqrt{u^2-4}}$.

再令 $u=2\sec t$，则 $du=2\tan\sec t dt$，

当 $u=3$ 时 $t=\arccos\dfrac{2}{3}$，当 $u=4$ 时 $t=\dfrac{\pi}{3}$，

$$\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int_3^4\frac{du}{\sqrt{u^2-4}}=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\tan t\sec t}{2\tan t}dt$$

$$=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)d\sin t$$

再令 $y=\sin t$（可直接利用凑微分法），

$$\frac{1}{2}\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)d\sin t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$=\ln(2+\sqrt{3})-\ln(3+\sqrt{5})+\ln 2$。

例 6.9 设 $f(x)-\cos^2 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$。

[解] 记 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=I$，再令 $2x=u$，则 $dx=\frac{1}{2}du$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du=\frac{1}{2}I。$$

对等式 $f(x)-\cos^2 x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$ 两边取积分得到，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)-\cos^2 x]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{I}{2}dx=\frac{\pi}{4}I$$. 即

$$I-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}I,$$

故 $I-\frac{\pi}{4}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$,

因此 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{\pi}{4-\pi}$。

例 6.10　设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，则（ D ）。

(A) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$,

(B) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=2\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$,

(C) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$,

(D) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

[解] 令 $x=\pi-t,\ dx=-dt$,

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt+\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt,$$

移项得知答案为 D。

6.2.3 分部积分法

设 $f(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=F(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)dx$$

例 6. 11　求 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln xdx$.

解：$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln xdx=x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}xd(\ln x)$

$$=e-\left(-\frac{1}{e}\right)-\int_{\frac{1}{e}}^{e}dx=\frac{2}{e}。$$

例 6．12 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$，并求 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$。

证：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，

$$J_n=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx。$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，（$n=2,3,\cdots$），初值：$J_0=\frac{\pi}{2},\quad J_1=1$。

注：上述结果称为积分的递推公式，常用递推公式有一步递推或二步递推格式，应指出的是，以递推公式表示积分结果，必须给出初值，一步递推格式需有一步初值，二步递推格式需有二步初值，才能构成完备的计算格式。

上述结果可归纳得到下述实用形式：

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\qquad I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot 1$$

（$n=1,2,3,\cdots$）。

例 6.13 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\sin x}-e^{\cos x}+\sin^5 x}{8}dx=$（　）。

(A) $\frac{\pi}{4}$。(B) $\frac{1}{15}$。(C) $\frac{\pi}{8}$。(D) $\frac{1}{30}$。

由对称性与积分概念，立即得知答案

$I=\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$，选(B).

例 6.14 已知 $A=\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt$，则 $\int_0^1\frac{e^t}{(1+t)^2}dt=$________. 答案：

$1-\frac{e}{2}+A$。

解：因为 $A=\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt$,

所以 $\int_0^1\frac{e^t}{(1+t)^2}dt=-\frac{e^t}{1+t}\bigg|_0^1+\int_0^1\frac{e^t}{1+t}dt$

$=1-\frac{e}{2}+A$。

例 6.15 设 n 为正整数，计算 $\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$.

[解] （方法 1）

$$\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$$

$$=-\frac{x^2(1-x)^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1+\frac{2}{n+1}\int_0^1 x(1-x)^{n+1}dx$$

$$=-\frac{x(1-x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\bigg|_0^1+\frac{2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x(1-x)^{n+2}dx$$

$$=-\frac{2(1-x)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\bigg|_0^1=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

（方法 2）令 $1-x=t,\ dx=-dt$，则有

$$\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$$

$$=\int_0^1 t^n(1-t)^2 dt=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$$

6.3 变限积分

6.3.1 变上限积分

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\forall x\in[a,b]$，存在唯一的实数 $\int_a^x f(t)dt$ 与之对应，因此变上限积分 $\int_a^x f(t)dt$ 定义了一个函数，记作 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，我们称其为变上限积分。

定理 6.4　(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 定义的函数在 $[a,b]$ 上连续。

注：$F(x)$ 不一定是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 定义的函数在 $[a,b]$ 上可导，且 $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$。(注意：$F(x)$ 一定是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数)。

证明：(1) $\forall x\in[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $\Delta F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$，

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\forall x\in[a,b]$，存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|\le M$，于是

$$0\le|\Delta F(x)|\le\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|\le M|\Delta x|$$

由夹逼定理可得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta F(x)=0$，因此 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} dt$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$$

上式中ξ为x与$x+\Delta x$之间的一个数，(上述证明用到积分中值定理)。

例 6.16 设$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，其中

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & -1\le x\le 0, \\ 2-x^2, & 0<x\le 2. \end{cases}$$

则$F(x)$在$[-1,2]$内[D]。

(A)是 $f(x)$的原函数．(B)可导．

(C)不连续；　　(D) 连续但不可导。

解: $f(x)$是在$[-1,2]$上有第一类间断点的可积函数，没有原函数。

变下限积分$\int_x^b f(t)dt$有同样的性质：

定理 6.5 (1) 若 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则变下限积分$F(t)=\int_x^b f(t)dt$是连续函数；

(2) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则变下限积分$\int_x^b f(t)dt$是可导函数。

且

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(t)dt\right)=-f(x)$$

6.3.2　复合变限积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$

定理 6.5 (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\alpha(x),\beta(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则复合变限积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ 是连续函数。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\alpha(x),\beta(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,则复合变限积分 $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ 是可导函数，其导数为

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

6.3.3 变限积分的相关问题

既然变限积分定义了一个函数，那么一元微分中对函数的所有运算，对变限积分也同样可以进行。例如，我们可以处理下列问题：

变限积分定义的函数作为无穷小量阶的估计；罗必达法则在变限积分定义的函数极限问题中的应用。

变限积分定义的函数的单调性及极值问题;

变限积分定义的函数的泰勒展开;

变限积分定义的函数的积分问题.

关于原函数的一些重要结论

结论 1 连续奇函数之原函数必为偶函数。

结论 2 连续偶函数之原函数必为奇函数与常数之和，其中只有一个为奇函数（$C=0$）。

结论 3 连续周期函数之原函数必为周期函数与线性数之和，且周期不变。

连续周期函数 $f(x)$ 之原函数为周期函数的充要条件是

$\int_0^T f(x)dx=0$，其中 $T>0$ 为周期。

结论 4 有第一类间断点的函数没有原函数。

结论 5 有第二类间断点的函数可以有原函数。

结论 6 变限积分表示的函数不一定是原函数。

例 6.17　证明连续偶函数之原函数必为奇函数与常数之和。

[证] 记 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，

要证存在奇函数 $G(x)$ 使得 $F(x)=G(x)+C$

其中 $F'(x)=f(x)$，C 为常数。

设 $G(x)=\int_0^x f(t)dt$ ，要证$G(x)$满足

$G(-x)=-G(x)$,

显然$F(x)=G(x)+C$，其中 $f(-x)=f(x)$，因此

$G(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt$，令$u=-t$，于是得到

$$G(-x)=\int_0^x f(-u)d(-u)$$

$$=-\int_0^x f(u)d(u)=-G(x)。$$

例 6.18 设 $f(x)$是连续的周期为T 的函数，证明$\int_a^{T+a} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

证明：证法一 因为 $f(x)$ 是连续函数，将a 作为变量，

$$\frac{d}{da}\int_a^{T+a} f(x)dx=f(T+a)-f(a)=0$$

$\int_a^{T+a} f(x)dx$ 关于变量a 为常数，而当$a=0$时，

$$\int_a^{T+a} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=C,$$

因此$\int_a^{T+a} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=C$ 对任意的a 均成立.

证法二

$$\int_a^{T+a} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{T+a} f(x)dx$$

$$=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_0^a f(x-T)dx$$

$$=\int_0^T f(x)dx$$

注：证法一 要求 $f(x)$是连续函数，证法二仅要求 $f(x)$是可积函数.

例 6.19 设 $f(x)$是以T 为周期的连续函数，

（1）证明 $f(x)$原函数必为周期函数与线性函数$ax+b$之和，且周期不变。

（2）连续周期函数 $f(x)$之原函数为周期函数的充要条件是

$\int_0^T f(x)dx=0$，其中$T>0$为周期。

证：(1) 设 $f(x+T)=f(x)$,

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C,$$

只需证存在$a,b\in R$与以T为周期的连续函数$g(x)$,使得

$$F(x)=g(x)+ax+b,$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+ax-ax+C$$

$$=\int_0^x (f(t)-a)dt+ax+C$$

取$b=C$， $g(x)=\int_0^x (f(t)-a)dt$，

$$F(x)=g(x)+ax+b。$$

只需令 $g(x+T)=g(x)$,求出$a,\in R$即可。

$$g(x+T)=\int_0^{x+T} (f(t)-a)dt$$

$$=\int_0^x (f(t)-a)dt+\int_x^{x+T} (f(t)-a)dt$$

$$=g(x)+\int_0^T f(t)dt-aT,$$

令$\int_0^T f(t)dt-aT=0$，解得

$$a=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\in R。$$

（2）由已知条件得到$a=0$。以上证明过程可逆。

例6.20 设$f(x)=\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$，

$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是

$g(x)$的（ ）。

(A)低阶无穷小量。 (B)高阶无穷小量。

(C)等价无穷小量。 (D)同阶但非等价无穷小量.

答案：(B).

例 6.21 设$f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$，$f(x)>0$，$g(x)$单调增加，

则$\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ [　　　].

(A)在$[0,+\infty)$上单调增加。(B) 在$[0,+\infty)$上单调减少；

(C) 在$[0,+1)$上单调增加，在$[1,+\infty)$上单调减少。

(D) 在$[0,+1)$上单调减少，在$[1,+\infty)$上单调增加。

解：由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}>0,$$

所以$\varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，答案：(A).

例 6.22　设 $f(x)>0,$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\left[f(t)\right]^{-1}dt$

在$[a,b]$上有切仅有一个零点。

证明：$f(x)>0,$在$[a,b]$上连续,则$F(x)$在$[a,b]$上连续且可导.

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$$

$F(x)$在$[a,b]$上单调增．又因为

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$$

由连续函数零点定理可知，$F(x)$在$[a,b]$上有且仅有一个零点。

例 6.23　确定常数a,b,c的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$$

[解] 首先由分母极限为零，必有

$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$。于是$b=0$。

其次 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c\neq 0,$$

必有$a=1,\quad \Rightarrow c=\dfrac{1}{2}$。

例 6.24　设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=0$，其反函数为$g(x)$，

$\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$。

[解] 由等式$\int_0^{f(x)} g(u)du=x^2e^x$ 两侧关于

x求导数，注意到$g(f(x))=x$，得到

$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x,$　　限 制　$x\neq 0$　，　则 有

$f'(x)=2e^x+xe^x,$

积分得到 $f(x)=(x+1)e^x+\mathrm{C}$，由 $f(0)=0$及

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1+C=f(0)$　，　解 出　$C=-1$　，　于 是

$f(x)=(x+1)e^x-1$。

例 6.25　设 $f(x)$为连续非负函数，对所有大于 1 的常数 b，由$1\leq x\leq b$及

$0 \le y \le f(x)$围成区域的面积为$\sqrt{b^2+1}-\sqrt{2}$，求$f(x)$。

[解] 由 $\int_1^b f(x)dx = \sqrt{b^2+1}-\sqrt{2}$ 得

$$\int_1^x f(t)dt = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{2},$$

将上式两边对x求导得 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。

例 6.26 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为偶函数，且 $F(x)=\int_0^x(\sin t-2t)\cdot f(-t)dt$，则$F(x)$是[A].

A、偶函数　B、奇函数；C、周期函数；D、以上三种函数都不是。

6．4 含有参数的积分

积分号内含有参数的问题是一类重要题型，这类问题往往需要对参数求导数。典型方法有两个：

（1）当参数以因子形式出现在积分号内时，则将含参数的因子移到积分号外面，

（2）如无法将含参数的部分移到积分号外面，则引入变量替换。

例 6.27 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \cos(2x-t)^2 dt =$____ 。

[解] 令$2x-t=u,\quad dt=-du$，则

$$I(x)=-\int_{2x}^{x}\cos u^2 du=\int_x^{2x}\cos u^2 du \quad 。$$

$$I'(x)=2\cos(2x)^2-\cos x^2。$$

例 6.27 设 $f(x)$连续，已知 $f(1)=1$，且

$$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2,$$

求 $\int_1^2 f(t)dt$。

[解] 首先处理参数，令$2x-u=t,\ dt=-du$，于是

$$\int_0^x tf(2x-t)dt=\int_{2x}^{x}(2x-u)f(u)du$$

$$=2x\int_x^{2x} f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x^2,$$

两端求导数得

$$2\int_x^{2x} f(u)du + 4xf(2x) - 2xf(x)$$

$$-4xf(2x) + xf(x) = \frac{x}{1+x^4},$$

即有 $2\int_x^{2x} f(u)du = xf(x) + \dfrac{x}{1+x^4},$

令 $x=1$，注意到 $f(1)=1$，得到 $\int_1^2 f(t)dt = \dfrac{3}{4}$。

例 6.28 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，记 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$，试证

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减。

[证] (1) 设 $f(x)$ 为偶函数，考虑

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt,$$

令 $t=-u,\quad dt=-du$，则有

$$F(-x)=-\int_0^{x}(-x+2u)f(u)du = F(x),$$ 故 $F(x)$ 为偶函数

(2) 设 $f(x)$ 单调不增，考虑

$$F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)dt - 2\int_0^x tf(t)dt\right]'$$

$$=\int_0^x f(t)dt + xf(x) - 2xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt - xf(x)$$

$$= x[f(\xi)-f(x)]$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间，于是

当 $x>0$ 时，$f(\xi)-f(x)\ge 0, \Rightarrow F'(x)\ge 0$；

当 $x<0$ 时，$f(\xi)-f(x)\le 0, \Rightarrow F'(x)\ge 0$；

当 $x=0$ 时，$F'(0)=0$，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $F'(x)\ge 0$。

所以 $F(x)$ 单调不减。

例 6.29 已知 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，设 $F(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求 $F'(x)$，并讨论 $F'(x)$ 的连续性。

[解] 首先由已知 $f(x)$ 连续性及极限等式应有 $f(0)=0$，

其次令 $u=xt, dt=\frac{du}{x}, x\neq 0$，则有

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du$

为连续函数。

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2},$$

$$F'(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du, & x\neq 0\\ \frac{A}{2} & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=F'(0),$$

因此 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处连续。

例 6.30 设 $f(x)$ 为已知可导奇函数，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，

则 $\frac{d}{dx}\int_x^{x-f(x)} xg(t-x)dt=$ _A_

(A) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt + x^2 f'(x)$.

(B) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt - x^2 f'(x)$.

(C) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt + xf'(x)$.

(D) $\int_0^{-f(x)} g(t)dt - xf'(x)$

[解] 记

$I(x) = \int_x^{x-f(x)} xg(t-x)dt = x\int_x^{x-f(x)} g(t-x)dt$ 对上式中的积分令 $t - x = u, \quad dt = du$,

$$I(x) = x\int_0^{-f(x)} g(u)du$$

$$I'(x) = \int_0^{-f(x)} g(u)du + xg(-f(x))(-f'(x))$$

$$= \int_0^{-f(x)} g(u)du + xg(f(x))(f'(x))$$

$= \int_0^{-f(x)} g(u)du + x^2 f'(x)$=(A)

例 6.31 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+e^t} dt =$____。

答案：0。$\exists X > 0$，使当 $x > X > 0$ 时，

$$0 \le \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+e^t} dt \le \frac{x\ln 2x}{1+e^x},$$

应用夹逼定理得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+e^t} dt = 0$。

6．5 积分综合例题

例 6.32 已知连续曲线 $y = f(x)$ 关于点 $(a,0)$ $(a \ne 0)$ 对称，则 $\forall c \in R, \int_{-c}^{c} f(a-x)dx$=（ D ）。

(A) $2\int_0^c f(2a-x)dx$. (B) $2\int_{-c}^0 f(2a-x)dx$.

(C) $2\int_0^a f(c-x)dx$. (D) 0.

[解]由几何意义可得知选(D).曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)\ (a\neq 0)$ 对称。

以下是几个用到区间变换的例题。

例 6.33　已知 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，

证明 $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$.

[证] $\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$,

由于 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称，

对后一积分有 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx=\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)dx$,

令 $t=a+b-x$，则 $dx=-dt$，于是得到

$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x)dx=-\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(t)dt=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt$,

所以 $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx$。

例 6.34　求 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大最小值。

[解]　$f(x)$ 为偶函数，只需求 $[0,+\infty)$ 上的最大最小值。

令 $f'(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}=0,\quad x=\sqrt{2}$ 为唯一驻点，且

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)>0,$

当 $x>\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0,$ 因此 $x=\sqrt{2}$ 为极大值点，即最大值点。

最大值为 $f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=1+e^{-2}$。

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt$$

$$=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2-1=1$$

又 $f(0)=0$，因此 $x=0$ 为最小值点，最小值为 0。

例 6.35　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$f'(x)$ 非减，证明

$\int_a^b f(x)dx \le \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$。

证： $\forall x \in [a,b]$设

$$F(x)=\frac{x-a}{2}[f(a)+f(x)]-\int_a^x f(t)dt,$$

$F(a)=0$,则只须研究$F(x)$的单调性,证明$F(x)\ge F(a)=0$。

$$F'(x)=\frac{1}{2}[f(a)+f(x)]+\frac{x-a}{2}f'(x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2}[f(a)-f(x)]+\frac{x-a}{2}f'(x)-f(x)$$

$$=\frac{(a-x)}{2}f'(\xi)+\frac{x-a}{2}f'(x)$$

$$=\frac{x-a}{2}[f'(x)-f'(\xi)],\ \xi\in(a,x)$$

$f'(x)$非减，又$F'(x)\ge 0$,

$F(x)\ge F(a)=0$ 。

例 6.36　证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$.

［证］（方法 1）

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx,$$

对上述第二个积分令$t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t-\sin t}{1+(t-\frac{\pi}{2})^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin t-\cos t)[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+(t-\frac{\pi}{2})^2}]dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin t-\cos t)(\frac{\pi^2}{4}-\pi t)}{(1+t^2)\left(1+(t-\frac{\pi}{2})^2\right)}dt<0,$$

（方法 2）

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$+\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

其中$\xi_1\in(0,\frac{\pi}{4}),\ \xi_2\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，对上述第二个积分令$t=\frac{\pi}{2}-x$，则

有

$$I=(\frac{1}{1+\xi_1^2}-\frac{1}{1+\xi_2^2})\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=(\frac{1}{1+\xi_1^2}-\frac{1}{1+\xi_2^2})(1-\sqrt{2})<0$$

例 6.37　方程$\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt=0$的根的个数为（B）。

(A)0.　　(B)1。　(C)2。　(D)3。

解:`设 $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt+\int_{\cos\frac{\pi x}{2}}^0 e^{-t^2}dt$，

有 $f(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$，

$f(1)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt>0$，

所以$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$；

又 $f'(x)=\sqrt{1+x^2}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot e^{-\cos^2\frac{\pi x}{2}}>0$，所以有且仅有一个根。

例 6.38　设$k>1$，f 在$[0,1]$上连续，在内$(0,1)$可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\,dx=0,$$

证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$。

[证] 由积分中值定理得：$f(1)=\xi e^{1-\xi}f(\xi)$，$\xi\in(0,\frac{1}{\xi})$，

设$\varphi(x)=xe^{1-x}f(x)$则$\varphi(x)$在$[\xi_1,1]$上连续，在$(\xi_1,1)$内可导，

且 $\varphi(\xi_1)=\varphi(1)=f(1)$，

因此 存在$\xi\in(1,\ \xi_1)\subset(0,1)$使得

$\varphi'(\xi)=e^{1-\xi}f(\xi)-\xi e^{1-\xi}f(\xi)+\xi e^{1-\xi}f'(\xi)=0$

$e^{1-\xi}\neq 0$，于是 $f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，

所以 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$。

例 6.39 设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，且满足

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内可导，则存在 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

(2) 若 $f'(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内连续，则存在 $\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 与 $\eta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，分别使得

$f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$ 与 $f'(\eta)=f(\eta)\tan\eta$

[证]（1）首先由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot f(x)\,dx=0$，则 $\exists x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，

使得 $\cos^2 x_0 f(x_0)=0$，但 $\cos x_0\neq 0,\Rightarrow f(x_0)=0$。
另外由积分中值定理得到，取辅助函数

$\varphi(x)=\cos^2 xf(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内可导，且 $\varphi(x_0)=0,\quad \varphi(\dfrac{\pi}{2})=0$，

因此 $\exists\xi\in(x_0,\dfrac{\pi}{2})\subset(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得

$$\varphi'(\xi) = -2\sin\xi\cos\xi f(\xi) + \cos^2\xi f(\xi) = 0$$

即有 $f'(\xi) = 2f(\xi)\tan\xi$.

(2)首先由分部积分，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot f(x)\, dx =$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-2\cos x\sin x \cdot f(x) + \cos^2 x \cdot f'(x))dx = 0$$

由被积函数的连续性，则存在$\xi \in (0, \dfrac{\pi}{2})$，使得

$\xi(-2\cos\xi\sin\xi \cdot f(\xi) + \cos^2\xi \cdot f'(\xi)) = 0$ 其次，

$\xi\cos\xi \neq 0,$ 必有

$-2\sin\xi \cdot f(\xi) - \cos\xi \cdot f'(\xi)) = 0$，

即有 $f'(\xi) = 2f(\xi)\tan\xi$。

另由分部积分，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(x)\, d\sin x$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x \cdot f'(x) - \sin x f(x))dx$$

$= -(\cos\eta \cdot f'(\eta) - \sin\eta \cdot f(\eta))\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = 0$ 其中

$\eta \in (0, \dfrac{\pi}{2})$。

另外，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = 1 \neq 0,$ 因此

$\cos\eta \cdot f'(\eta) - \sin\eta \cdot f(\eta)) = 0$，

即有 $f'(\eta) = f(\eta)\tan\eta$。

例 6.42　设 $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\sin t\right|dt,$

（1）证明 $f(x)$是以π为周期的周期函数；(2) 求 $f(x)$的值域。

解（1）$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\left|\sin t\right|dt,$ 设$t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\sin(u+\pi)\right|du$$

$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\sin u\right|du=f(x)$$

故 $f(x)$是以π为周期的周期函数。

（2）因为$\left|\sin x\right|$在$(-\infty,+\infty)$上连续，注意到 $f(x)$的周期为π，故只需在$[0,\pi]$上讨论其值域.。因为

$$f'(x)=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|-\left|\sin(x)\right|=\left|\cos(x)\right|-\left|\sin(x)\right|$$ 令

$f'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{\pi}{4},x_2=\dfrac{3\pi}{4},$ 且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t dt=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left|\sin t\right|dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t dt-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t dt=2-\sqrt{2},$$

又 $f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=1,\ f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)dt=1,$因而

$f(x)$的最小值是$2-\sqrt{2}$，最大值是$\sqrt{2}$，故 $f(x)$的值域是$\left[2-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$。