微分学基本定理及应用 2　不定积分与原函数

4．5 泰勒公式与洛必达法则

4．5．1　引言

在科学计算与理论研究中，常常遇到非线性函数 $f(x)$，由非线性问题导致的计算复杂性与理论上的困难往往是不可避免的。而多项式函数系由幂函数的线性组合而构成的，在计算上具有无以论比的简单性(由一个循环体语句即可实现多项式函数的数值计算)，因而用一个多项式函数 $p_n(x)$ 去逼近或近似一个非线性函数就成了重要的数学手段。另外，对函数的许多性态研究，最终也将由泰勒公式(Taylor 公式)给出理论依据。例如局部极值问题，以及用于求极限的洛必达法则，都是以泰勒公式为理论依据而得到某些有效的方法。

由 $y = f(x)$ 在　处的可导性与可微性概念。在 x_0 附近的 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

其中 $\alpha(x - x_0)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量。

由(11.1)式可发现，计算 $f(x)$ 的近似值可取

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

若舍去的误差 $\alpha(x - x_0)$ 不能满足精度要求，则可设想是否在 x_0 与 x 之间存在 ξ，使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + af''(\xi)(x - x_0)^2$$

其中 a 为常数，事实上 $a = \frac{1}{2}$。这正是泰勒公式的基本思想。也是微分中值定理的进一步推广。

4．5．2　n 阶泰勒公式

定理 4.10　泰勒公式　设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有 $n+1$ 阶导数，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，

ξ是介于x_0和x之间的某个数。$R_n(x)$称为n阶泰勒余项(具有拉格朗日形式的余项)。

$x_0=0$时的泰勒公式叫做麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}。$$

具有皮亚诺余项形式的泰勒公式为(此时，只要求函数$f(x)$在区间(a,b)内具有n阶导数)为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left|(x-x_0)^n\right|$$

注(1) 对本课程而言，具有拉格朗日形式余项的泰勒公式常用来证明不等式或分析一些理论问题。

(2) 具有皮亚诺形式余项的泰勒公式常用来求极限，或考查(局部)极值问题。

(3) 具有拉格朗日余项的泰勒公式可以视为拉格朗日微分中值定理的推广，而拉格朗日微分中值定理实质是 *0* 阶泰勒公式。

（4）对给定的函数进行泰勒展开时，一般有两种方法，即用泰勒公式定义，求各阶导数的方法，称之为直接法；而利用初等函数泰勒公式的结论为依据，再利用函数的代数运算与复合运算进行泰勒展开的方法，统称为间接方法。在题目中，如果没有特别指明用直接方法，则可利用间接方法。

例 4.31 将 $f(x)=x^2$ 在 $x_0=1$ 处展开为一阶泰勒公式(具有拉格朗日余项和皮亚诺余项)。

解：$f(1)=1,\ f'(1)=2,\ f''(x)=2$，

在 $x_0=1$ 处的展开式为（具有拉格朗日余项）：

$$x^2=1+2(x-1)+(x-1)^2$$

具有皮亚诺余项形式的展开式为（一阶）

$$x^2=1+2(x-1)+o((x-1))。$$

例 4.32 求 $f(x)=\sin x-x$ 在 $x_0=0$ 处的三阶泰勒公式(具有皮亚诺余项)。

解：只须利用 $\sin x$ 的展开式进行运算即有

$$\sin x-x=-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

例 4.33 求 $\tan x$ 在 $x=0$ 处的三阶泰勒公式(具有皮亚诺余项形式)。

解：

$$\tan x\big|_{x=0}=0,(\tan x)'\big|_{x=0}=\sec^2 x\big|_{x=0}=1$$

$$(\tan x)''\big|_{x=0}=2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\big|_{x=0}=0$$

$$(\tan x)'''\big|_{x=0}=4\sec^2 x\cdot\tan^2 x+2\sec^4 x\big|_{x=0}=2$$

因此得到三阶展开式

$$\tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3)。$$

例 4.34　求 e^x 在 $x_0 = -1$ 处具有拉格朗日余项形式的 n 阶泰勒公式。

解：用间接法，将 e^x 写为 $e^x = e^{x+1-1} = \frac{1}{e}\cdot e^{x+1}$，将 e^{x+1} 视为 e^X，（即令 $X = x+1$），利用基本展开式即有

$$e^x = \frac{1}{e}(1+(x+1)+\frac{1}{2!}(x+1)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+1)^n+\cdots)$$

$$= \frac{1}{e}+\frac{1}{e}(x+1)+\frac{1}{2!\cdot e}(x+1)^2+\cdots+\frac{1}{n!\cdot e}(x+1)^n$$

$$+\cdots+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!\cdot e}(x+1)^{n+1}$$

其中 ξ 在 x 与 $x_0 = -1$ 之间，$x \in (-\infty,+\infty)$。

例 4.35　设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right) = 0$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}。$$

解：$\sin 6x = 6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3)$，

因此由已知条件

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}-36+0=0,$$

最后得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$。

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3},$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}-\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{(6x)^3}{x^3}$$

最后得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$。

注：下列作法是错误的

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=0$$

错误原因在于第一个等号后的无穷小量替换不在因子位置，属非法替换，答案亦为错误。

4．5．3　洛必达法则

洛必达法则是求极限的重要方法，它是由柯西中值定理，把函数比变为其导数比，而导出的方法。

定理 4.11（洛必达法则）　如果

(1) $\lim f(x)=\lim g(x)=0$（或∞）

(2) 在极限点附近，$f'(x)$，$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为无穷大，则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$存在或为无穷大，

且等于$\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

注(1) 以上极限中的趋向为

$x\to x_0$或∞或单边趋向。

(2) 请务必注意，运用洛必达法则是一种试验过程，若导数比值确有极限，则原极限立即有答案，而当导数比值极限不存在，或虽然可能存在，却不能由已知条件求出此极限，则洛必达法则试验失败，应另寻其它方法解决问题。

例 4.36（2004-2-15）　求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right].$$

解 1：原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.$$

解法 2：原式

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

若将上题改为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1-\cos x)(e^{\sin x}-1)}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$$

则应先将分母作无穷小替换，进而避免直接用洛必达法则导致的复杂求导计算。答案不变。

例 4.37 求极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(e^{x^2}-1)}$。

解　（先考虑等价无穷小代换，后考虑罗必达法则）

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(e^{x^2}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x-x\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}\text{。}$$

例 4.38 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln|x-a|}{\ln|e^x-e^a|}$。

解：

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x\ln|x-a|}{\ln|e^x-e^a|}=\lim_{x\to a}\cos x\cdot\lim_{x\to a}\frac{\ln|x-a|}{\ln|e^x-e^a|}$$

$$=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}$$

$$=\cos a\cdot\lim_{x\to a}e^{-x}\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$$

$$=e^{-a}\cdot\cos a\cdot e^a=\cos a\text{。}$$

对其他型的未定式（0^0型、$\infty-\infty$型，0^0型，1^∞型和∞^0型)，必须通过适当的恒等变型，化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型后，才能使用洛必达法则进行试验。

例 4.39　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$。

解：(方法 1)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}。$$

(方法 2)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln(1+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}。$$

4．6 综合例题

例 4.40 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $x+\dfrac{f(x)}{x}\neq0$，已知

$$\lim_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$。

答案：$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=4$

[解] 由题得：

$$\lim_{x\to 0}(1+x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}=e^3$$

进而得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}{x}=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})=0\Rightarrow \lim_{x\to 0}(x+\frac{f(x)}{x})=0$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+\frac{f(x)}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+f(x)}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=3$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=2$，

由连续性与导数定义得到 $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=4$。

或：$f(x)=2x^2+o(x^2)$，故 $f(0)=0$

$f'(0)=0,\ f''(0)=4$。

例 4.41 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且

$f(0)=1, f'(0)=2$，

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$。

解：考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^2(1-f(x))}}$$

由符合极限定理，只需求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2(1-f(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2(1-f(x))}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{1-f(x)}=\frac{1}{6f'(0)}=\frac{1}{12}$$

注意，以上第三个等号是用了极限定义。

由复合极限定理得到

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}}=e^{\frac{1}{12}}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}=e^{\frac{1}{12}}。$$

注：请特别注意，对第二个等号后的极限计算，不能用洛必达法则，因为导数比值的极限无法求得(本题没有 $f'(x)$ 连续的条件)。

即下列作法是错误的：

$$\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-x}{1-f(x)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{-f'(x)}=\frac{1}{6f'(0)}=\frac{1}{12}$$

以上第三个等号用到了 $f'(x)$ 的连续性，而本题未给出 $f'(x)$ 的连续性条件，极限无法计算出结果。这是运用洛必达法则时的常见错误。

例 4.42 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导，对一切 $x\in(0,+\infty)$ 有 $f''(x)\neq 0$，证明在 $(0,+\infty)$ 内曲线 $y=f(x)$ 上一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与该曲线除切点外无交点。

[证]（方法 3）Taylor 公式方法。将（方法 1）中的

$$F(x)=f(x)-y(x)$$
$$=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

在 $x=x_0$ 处展开为 Taylor 公式，

$$F(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,\ \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间。}$$

因为 $f''(x)\neq 0$，由导数零点定理，$f''(x)$ 不变号，则 $F(x)$ 亦不变号。证毕。

例 4.43 设 $b>a>e$，证明 $a^b>b^a$。提示：设

$f(x)=x\ln a-a\ln x$，或 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$。

[证] 构造 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 其中 $x>e$，则

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，易得 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 是严格单减的，对 $b>a>e$，有

$f(b) < f(a)$，即$\dfrac{\ln b}{b} < \dfrac{\ln a}{a}$，调整得

$$a\ln b < b\ln a,\text{即}\ln b^{a} < \ln a^{b},$$

由对数函数的性质得：$a^{b} > b^{a}$。

例 4.44 已知函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0) = f(1) = 0$。证明当$x \in [0,1]$时，

$$\left| f'(x) \right| \le \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} \{ \left| f''(x) \right| \}。$$

证明：$\forall a \in [0,1]$，将 $f(x)$在$x = a$处展开为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2$$

（ξ在a, x之间）

分别令$x = 1$和$x = 0$得到

$$0 = f(1) = f(a) + f'(a)(1-a) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(1-a)^2$$

其中$\xi_1 \in (a,1)$，

$$0 = f(0) = f(a) + f'(a)(-a) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(a)^2$$

其中$\xi_2 \in (0,a)$，两式相减并移项整理

$$f'(a) = -\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)(1-a)^2 - f''(\xi_2)a^2 \right),$$

当 $a=0$ 或 $a=1$ 时，$\left|f'(a)\right|=\dfrac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|$ 或

$\left|f'(a)\right|=\dfrac{1}{2}\left|f''(\xi_2)\right|$，原不等式的等号成立。

当 $a\in(0,1)$ 时，由三角不等式得到

$$\left|f'(a)\right|\le\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|(1-a)^2+\left|f''(\xi_2)\right|a^2$$

令 $\left|f''(\xi)\right|=\max\left\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\right\}$，

其中 $\xi\in(0,1)$。因此

$$\left|f'(a)\right|\le\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|\left((1-a)^2+a^2\right)\le\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}\{\left|f''(x)\right|\}。$$

再由 a 是 $[0,1]$ 上任意一点，

所以 $\left|f'(x)\right|\le\dfrac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,1]}\{\left|f''(x)\right|\}$。

例 4.45 设 $\delta>0$, $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $\left|f(x)\right|\le x^2$，

则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 [C]。

(A) 间断点。　(B) 连续而不可导的点。

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$。

(D) 可导的点，但 $f'(0)\neq0$。

【解】当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，因为 $\left|f(x)\right|\le x^2$，令 $x=0$ 得到 $f(0)=0$。另外有 $0\le\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$，

所以,由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0$，

且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$。

另外又有 $-x\le\frac{f(x)}{x}\le x.$，再次由夹逼准则得

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$，所以答案为（C)。

第 5 章 原函数与不定积分

5.1　不定积分与原函数

5．1．1　不定积分与原函数的定义

定义 5.1　$f(x)$ 是定义在区间 $I\in R$ 上的函数，若存在定义在 I 上的可导函数 $F(x)$，使得 $F'(x)=f(x),\quad\forall x\in I$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数。

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，$F(x)+C$ 也为 $f(x)$ 在 I 上的原函数，其中 C 为任意常数；同样可以证明，$f(x)$ 的任意两个原函数的差为常数.

定义 5.2 称 $f(x)$ 的所有原函数构成的集合 $\{F(x)+C\}$ 为 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx=F(x)+C$，

其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，C 为任意常数。

5.1.2　不定积分存在的充分条件和必要条件

定理 5.1 连续函数一定存在不定积分。

事实上，连续函数 $f(x)$ 的变上限积分

$\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数，因此

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C。$$

例 5.1 不连续的函数也可能有原函数或不定积分，例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

有原函数 $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$。

但 $x=0$ 点是 $f(x)$ 的第二类间断点．值得指出的是

定理 5.2 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间内有第一类间断点，则 $f(x)$ 在 (a,b) 区间内没有原函数。

例 5.2　设 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0, \\ ae^x - 1/x, & x < 0. \end{cases}$

若 $f(x)$ 在 R 上有原函数，则 $a=$（ ）．

(A) e^{-1}。　(B) 0。　(C) 1。　(D) a 任意。

解： $f(x)$ 必须在 $x=0$ 点连续，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$。首先

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, 其次应有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{ae^x-1}{x}$$

$$a\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-\frac{1}{a}+1}{x}=a-a\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{a}-1}{x}=1,$$

以上结果只当 $a=1$ 时成立。

例 5.3　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\ge 0; \\ \frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}, & x<0, \end{cases}$

则 f 的一个原函数为　（ B ）。

(A)　$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x, & x\ge 0; \\ -\frac{1}{2}e^{-x}, & x<0, \end{cases}$

(B)　$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}, & x\ge 0; \\ -\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{x}{2}, & x<0, \end{cases}$

(C)　$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x, & x\ge 0; \\ -\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}, & x<0, \end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+x+1, & x\geq 0;\\ -\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{x}{2}, & x<0,\end{cases}$

注：分段函数的不定积分分段计算需要仔细。 原函数要求：首先应该连续（特别在分段点），其次一定是可微函数。

例 5.4 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & x\leq 0\\ \dfrac{1}{2}x+1 & x>0\end{cases}$

试确定 $f(x)$的一个原函数,使$F(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

$$F(x)=\begin{cases}\arctan x+\dfrac{\pi}{4} & x\leq 0\\ x^2+x+\dfrac{\pi}{4} & x>0\end{cases}$$

例 5.5　$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

无原函数,因$t=0$为第一类间断点.

5.3　不定积分的计算方法

5.3.1　换元法

(1) 第一换元法（凑微分方法）

应作为基本方法强化训练）

$$\int f'(x)dx=f(x)+C$$ 或

$$\int f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=f(\varphi(x))+C。$$

例 5.6 计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$。

解：注意到

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}d(\frac{x}{a}) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d(a\tan x)}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)+C$$

例 5.7 $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx$

$$= \int \frac{d(\cos x)}{\cos x\sqrt{\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C \text{ 。}$$

例 5.8 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}d(x-a) - \frac{1}{x+a}d(x+a)\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

例 5.9 计算 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$ ‘

注意到 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$，

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}d(\frac{x}{a})=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=2\arcsin\sqrt{x}+C$$

于是 $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$=\int\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int\frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-\ln x}},$$

$$=2\arcsin\sqrt{\ln x}+C$$ 。

又如 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int\arcsin\sqrt{x}d(\arcsin\sqrt{x})$

$$=(\arcsin\sqrt{x})^2+C$$

例 5.10 $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

$=\int\frac{-d(\cos x)}{(2+\cos x)\sin^2 x}$

$=-\frac{1}{3}(\int\frac{-d(\cos x)}{(2+\cos x)}+\int\frac{(2-\cos x)d(\cos x)}{1-\cos^2 x})$

$=\frac{1}{3}\ln|2+\cos x|-\frac{1}{2}\ln|1+\cos x|$

$+\frac{1}{6}\ln|1-\cos x|+C$。

例 5.11 $\int\frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)}dx$

$=2\int(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x^2+1)})dx=\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+C$。

例 5.12 $\int\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx=\frac{\sin x}{x}+C$

（2）第二换元法

若 $\int f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(t)+C$，且 $x=\varphi(t)$ 有

反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则 $\int f(x)dx=F(\varphi^{-1}(x))+C$

例 5.13 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx\,(a>0)$

令 $x=a\sin t,(0\le t\le\frac{\pi}{2}),dx=a\cos tdt$

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\cdot a\cos dt$

$=a^2\int\cos^2 tdt$

$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$

$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

还有 $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$，$(a>0)$，令 $x=a\tan t$。

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$，令 $x=a\sec t$。

例 5.14 计算不定积分 $\int\frac{dx}{x-\sqrt{1-x^2}}$.

[解] (方法 1)令 $x=\sin t, dx=\cos tdt$，

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t}{\sin t-\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2}(\int\frac{\cos t+\sin t}{\sin t-\cos t}dt+\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t-\cos t}dt)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt{1-x^2}\right|-\frac{1}{2}\arcsin x+C$$

(方法 2)

$$I=\int\frac{\cos t}{\sin t-\cos t}dt$$

$$=\int\frac{\cos t+\sin t-\sin t+\cos t-\cos t}{\sin t-\cos t}dt$$

$$=\ln\left|x-\sqrt{1-x^2}\right|-I-\arcsin x+C$$

(回归法，解出 I 即可)。

例 5.15 求 $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$.

解：令 $\sqrt{2x-4}=t$，则

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}=\int\frac{4dt}{(t^2+4)^2}$$

$$=\frac{t}{2(t^2+4)}+\frac{1}{4}\arctan\frac{t}{2}+C$$

$$=\frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{2x-4}}{2}+\frac{\sqrt{2x-4}}{4x}+C$$

以上方法称为有理化.

5.3.2　分部积分法

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$$

分部积分法的应用

例 5.16 $\int x^2\sin xdx=-\int x^2d(\cos x)$

$$=-x^2\cos x+\int\cos xd(x^2)$$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+\cos x+C$$

例 5.17

$$\int\ln xdx=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$$

类似的例题有 $\int x^m\ln^n xdx$，其中 m,n 为自然数，

$\int\arcsin xdx$，$\int\arctan xdx$，$\int e^{ax}\sin bxdx$.

例 5.18 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$。[解]　(1)

设 $\ln x=t$，则

$x=e^t$，$f(t)=\dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$，则

$\int f(x)dx$

$$= -\int \ln(1+e^x)de^{-x} = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$= e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int (1 - \frac{e^x}{1+e^x})dx$$

$$= x - (1+e^{-x})\ln(1+e^x) + C。$$

例 5.19 设 $f(x)$ 一个的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，

求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx$。

解 $f(x) = (\dfrac{\sin x}{x})' = \dfrac{1}{x^2}(x\cos x - \sin x)$

$$f(\pi) = -\frac{1}{\pi}, f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xdf(x) = xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$$

$$= (xf(x) - \frac{\sin x}{x})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=-1-\frac{\pi}{2}(-\frac{4}{\pi^2})+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}-1。$$

例 5.20 计算 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$。

令 $\sqrt{1+e^x}=t$，

$$x=\ln(t^2-1),\quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=2\int \ln(t^2-1)dt$$

$$=2t\ln(t^2-1)-2\int \frac{2t^2}{t^2-1}dt$$

$$=2t\ln(t^2-1)-2\int \left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt$$

$$=2t\ln(t^2-1)-4t-2\int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t\ln(t^2-1)-4t+2\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C$$

5.3.3　一定可以用初等函数表示的不定积分

不定积分不一定可以用初等函数表示，例如，我们可以证明 $\int e^{x^2}dx$ 一定不可以用初等函数表示．一般而言，要证明一个不定积分不可以用初等函数表示是一件非

常困难的事．但我们可以证明有些不定积分一定可以用初等函数表示．

(1) 有理分式积分一定可以用初等函数表示

有理分式 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是多项式．

$$R(x)=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

其中 $P_1(x)$ 是多项式，$P_2(x)$ 是次数低于 $Q(x)$ 的多项式．有理分式 $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ 可以表示成一些最简有理分式的和(简称为有理分式的最简分解)．

(1) $Q(x)$ 的一次因子 $(x-a)$ 使得有理分式 $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ 分解后含有 $\dfrac{A}{x-a}$ 型的最简有理分式；

(2) $Q(x)$ 的 k 重因子 $(x-a)^k$ 使得有理分式 $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ 含有

$$\frac{A_1}{x-a},\frac{A_2}{(x-a)^2},\cdots,\frac{A_k}{(x-a)^k}。$$

型的最简有理分式；

(3) $Q(x)$ 的二次因子 x^2+px+q（其中 $p^2-4q<0$）使得有理分式 $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ 有

$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ 型的最简有理分式；

(4) $Q(x)$ 的 k 重二次因子 $\left(x^2+px+q\right)^k$（其中 $p^2-4q<0$）使得有理分式 $\dfrac{P_2(x)}{Q(x)}$ 有

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q},\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2},\cdots,\frac{M_kx+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

型的最简有理分式;

例 5.21 在什么条件下, $\displaystyle\int\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}dx$ 是有理函数?

解 因为

$$\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}$$

所以当 $A_1=B_1=0$ 时, $\displaystyle\int\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}dx$

是有理函数. 这时

$$\frac{ax^2+bx+p}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_2x(x-1)^2+A_3(x-1)^2+B_2x^3}{x^3(x-1)^2}$$

由比较系数得 $-2A_2+A_3=a$

$$A_2-2A_3=b$$

$$A_3=p$$

消去 A_2,A_3 得到: $a+2b+3p=0$.

例 5.22 求$\int\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$

解:

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

由待定系数法得到

$A=C=-\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{2},\quad D=E=1,$ 于是

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\int\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx=$$

$$\int(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2})dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\int\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x^2}{(1+x)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C$$

三角有理分式积分一定可以用初等函数表示

三角有理分式$R(\sin x,\cos x)$, 其中$R(u,v)$是有理分式.

(1) 半角置换　记$t=\tan\frac{x}{2}$, 则有

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dt=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

于是可将三角有理分式积分$\int R(\sin x,\cos x)dx$化为关于t的有理分式积分。

例 5.23 计算$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$。

解：记$t=\tan\frac{x}{2}$，则有

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int \frac{1+2t+t^2}{2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\tan\frac{x}{2}-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C.$$

当然，并不是所有的三角有理分式的积分都要用上述方法算.

(2) 三角置换

若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，

则取$t=\cos x$会简单一些。

$dx=-\frac{dt}{\sin x}$，$R(\sin x,\cos x)$中原含$\sin x$的奇次因子将变为偶次因子，从而使得$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$非线性关系得以解除。

若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则变换$t=\sin x$会简单一些；

若$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，则变换$t=\tan x$会简单一些；

一般有：$R(\sin x,\cos x)$

$$=\frac{1}{2}[(R(\sin x,\cos x)-R(-\sin x,\cos x))$$

$$+(R(-\sin x,\cos x)-R(-\sin x,-\cos x))$$
$$+(R(-\sin x,-\cos x)+R(\sin x,\cos x))]。$$

例 5.24 $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ （例 5.10）

可令$t=\cos x$，

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{-dt}{(2+t)\sin^2 x}$$
$$=\int\frac{-dt}{(2+t)(1-t^2)}$$

例 5.25 计算 $\int\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$

$$=\int\arcsin x d(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$$
$$=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{dx}{1-x^2}$$
$$=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

例 5.26 计算 $\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$,

[解] $\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$,

（方法 1）令$\cos x = t$，$dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$，

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)(1+t)}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)^2}$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|1+t| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{8}\ln|1-t| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\int(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-t})dt$$

$$= \frac{1}{4(1+\cos x)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C。$$

（方法 2）

$$\int\frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C。$$