# 基础部分
# 第二课 微积分
# 第 4 章 多元函数微分法及其应用

## （一）多元函数的几何应用

## （二）多元极值问题

## （三）综合例题

13.1 多元函数的几何应用

13.1.1 方向导数与梯度

（一）函数沿一方向上的变化，方向导数

- 方向导数定义：函数 $f$ 在 $\vec{x}_0$ 点，沿 $\vec{l}$ 的方向导数，记

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial l}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\vec{l}_0)-f(\vec{x}_0)}{t}$$

- 方向导数计算：若 $f\in C^1(D)$,给定 $\vec{x}\in D$ ,方向 $\vec{l}\in R^n$，则

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial l}=\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\cdot\vec{l}_0=(grad\ f(\vec{x}))^T\cdot\vec{l}_0\ ,$$

（二）梯度 ： $grad\ f(\vec{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\left(\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\right)^T$

性质： $\dfrac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial l}=grad\ f(\vec{x}_0)\cdot\vec{l}_0$；

设函数 $f$ 在 $\vec{x}_0$ 点可微，则其梯度，其方向及模特性是：

（i）沿梯度方向 $\vec{l}=grad\ f(\vec{x}_0)$ 的方向导数最大，即沿梯度方向函数增加最快;

（ii）其模等于该点最大方向导数之值。

例 1 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数,且在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分 $\dfrac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1$ ,

$\dfrac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$ .则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是( D )

$A.\ \vec{i}$ $B.\ \vec{j}$ $C.\ \vec{i}+\vec{j}$ $D.\ \vec{i}-\vec{j}$

例 2 设 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 可微，$\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ , $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}$。如果

$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{v}}=-2,\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{u}}=1$，求 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 的微分。

（ $df\Big|_{(x_0,y_0)}=(\sqrt{5}-4\sqrt{2})dx+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})dy$ ）

13.1.2 空间曲线的切线和曲面的法平面

（一）空间曲线的切线

设 $C$ 是 $R^3$ 空间中的一条曲线，参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\quad(\alpha\le t\le\beta)$

曲线 $C$ 在点 $P$ 处的切向量：$\vec{v}(t_0)=r'(t_0)=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)^T$

曲线 $C$ 在点 $P$ 处的切线方程是 $\begin{cases}x=x_0+x'(t_0)(t-t_0)\\ x=y_0+y'(t_0)(t-t_0)\\ z=z_0+z'(t_0)(t-t_0)\end{cases}$

曲线 $C$ 在该点切线的的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

例 3 求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$；$(a>0,c>0)$，在点 $M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面.

解：因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases}x=a/\sqrt{2}-a/\sqrt{2}\,t,\\ y=a/\sqrt{2}+a/\sqrt{2}\,t,\\ z=(\pi/4)c+c\,t,\end{cases}$

法平面方程为 $-\left(a/\sqrt{2}\right)(x-a/\sqrt{2})+\left(a/\sqrt{2}\right)(y-a/\sqrt{2})+c(z-(\pi/4)c)=0$ .

（二）空间曲面的切平面

(A) 空间曲面的三种表示：

显函数表示： $z=f(x,y)$； 隐函数表示： $F(x,y,z)=0$

(B) 空间曲面的切平面：

曲面 $S$ 过 $P_0(x_0,y_0)$ 切平面方程：设 $z_0=f(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y\ )}{\partial y}(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

法线方程是 $\dfrac{x-x_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}=\dfrac{y-y_0}{\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

接着要研究：函数满足什么条件时，其切平面存在？

定理：若曲面 $S$ 由显函数表示 $z=f(x,y)$ 在点 $p(x_0,y_0)$ 可微，则曲面 $S$ 在点 $p(x_0,y_0)$ 有不平行 $z$ 轴的切平面.

（ii）用隐函数和参数方程表示的曲面 $S$ 的切平面方程：

若曲面 $S$ 由隐函数 $F(x,y,z)=0$ 表示，

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\quad\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\quad\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

曲面 $S$ 过 $(x_0,y_{0,}z_0)$ 切平面方程

$$\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}(z-z_0)=0$$

法线方程是：$\dfrac{x-x_0}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}}=\dfrac{y-y_0}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}}=\dfrac{z-z_0}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}}$

例 4 求曲面 $S:2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。（轨迹为空间曲线：$\Rightarrow\begin{cases}2x-8y=5\\2x^2-2y^2+2z=1\end{cases}$）

例 5 证明球面 $S_1:x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2:x^2+y^2=a^2z^2$ 正交(orthogonal).

(3) 空间曲线的交面式：

$L$ 的方程是 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$. 向量 $\vec{v}=gradF(M_0)\times gradG(\mathrm{M}_0)$ 是 $L$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的一切向量.

例 6 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\z-x^2-y^2=0\end{cases}$，在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程.

（切线方程为 $\begin{cases}x=1+10t\\y=1-10t\\z=2\end{cases}$.）

## 13.2 多元极值问题

### 13.2.1 多元函数的 Taylor 公式

- 二元函数的 Taylor 公式

利用一元化的思想，将二元函数展公式的问题转化为一元问题：

设 $z=f(x,y)$，点 $M_0(x_0,y_0)$ 及点 $M(x,y)=M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$，

线段 $M_0M$ 可以表示为：$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\begin{cases}x=x_0+t(x-x_0)\\y=y_0+t(x-x_0)\end{cases},0\le t\le 1\right\}$，

函数在线段 $M_0M$ 上的值 是 $\Phi(t):=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\quad(0\le t\le 1)$，

且 $\Phi(0)=f(x_0,y_0)$，$\Phi(1)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x,y)$，

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\Phi(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(0)+\frac{\Phi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

**定理：** 设二元函数 $f$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U$ 中有 1 至 $n+1$ 阶的连续导数，$M(x,y)$ 是 $U$ 中一点，则有

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\left(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y\right), (0<\theta<1).$$

此式称为 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的带有拉格朗日型余项的 $n$ 阶 Taylor 公式． $n=0$ 时，Taylor 变为

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

这个类似于一元函数的微分中值定理．

当 $n=1$ 时，Taylor 变为

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(\Delta x\quad \Delta y)H(M_\theta)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix},$$ 其中，

$$M_\theta=\left(x_0+\theta\,\Delta x, y_0+\theta\,\Delta y\right),\quad H(M_\theta)=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}\right|_{(x,y)=M_\theta}$$ 称为**海色矩阵**。

当 $n=2$ 时，Taylor 变为

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta x\quad \Delta y)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+o(\rho^2).$$

例 7，设 $f(x,y)=x^2(x-y-2)$，求它在 $(1,-1)$ 点带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 公式。

解： $f(x,y)=3(x-1)-(y+1)+\frac{1}{2!}[(6\xi-2\eta)(x-1)^2-4\xi(x-1)(y+1)]$

### 13.2.2 多元函数极值问题的提法与普遍性

#### (一) 最优化问题的提法

在“某种条件”下的“某量最优”

问题: $\begin{cases}Min\ f(\vec{x})\\ s.t.\quad \vec{x}\in\Omega\end{cases}$

- 问题举例

例 8 今有 $m$ 个点 $P_i(a_i,b_i,c_i)$， $i=1,\cdots,m$，求一点 $P(x,y,z)$，到各点距离平方之和最小。

$$Min\ f(\vec{x})=\sum_{i=1}^{m}\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)$$

例 9 今有一空间曲面 $F(x,y,z)=0$ 及一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，在此曲面上找一点 $P(x,y,z)$ 到

$P_0$ 点距离最小。 $\begin{cases} Min\ f(\vec{x}) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\ s.t. \quad F(x,y,z)=0 \end{cases}$

**例 10** 今有一空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 及一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，在此曲线上找一点 $P(x,y,z)$

到 $P_0$ 点距离最小。 $\begin{cases} Min\ f(\vec{x}) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\ s.t. \quad F(x,y,z)=0, \quad G(x,y,z)=0 \end{cases}$

### 13.2.3 多元函数的无条件极值

**（一）极值的必要条件**

- **极值与极值点：**
- **极限的必要条件**

**定理（极值点的必要条件）** $gradf(\vec{x}_0) = \left( \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n} \right)^T = 0$ .

**（二）极值的充分条件**

**定理（极值点的充分条件）** 设 $f: R^n \to R$ 在 $M_0 \in R^n$ 点某邻域 $U(M_0)$ 内二阶偏导数连续，且 $M_0$ 是驻点，即 $gradf(M_0)=0$，则

1． $H_f(M_0)$ 正定时，$M_0$ 是 $f(\vec{x})$ 的极小值点；

2． $H_f(M_0)$ 负定时，$M_0$ 是 $f(\vec{x})$ 的极大值点；

3． $H_f(M_0)$ 不定时，$M_0$ 不是 $f(\vec{x})$ 的极值点.

其中，$H_f(M_0)$ 为 $f(\vec{x})$ 在 $M_0$ 处的海森矩阵.

4．当 $AC-B^2=0$ 时,仅仅根据 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的二阶导数不足以判定 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 是否取得极值,需要作进一步讨论,这里从略.

**例 11** 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有局部极值.

**解** 求 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3-4x=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3-4y=0 \end{cases}$ ,.

在上述每个点计算 $A,B,C$ 得到下表：

| $(x_i, y_i)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(0,-1)$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ | $(\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ | $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_i$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| $B_i$ | $-4$ | 8 | 8 | $-4$ | 8 | 8 | $-4$ | 8 | 8 |
| $C_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A_iC_i-B_i^2$ | $-16$ | $-32$ | $-32$ | $-32$ | 64 | 64 | $-32$ | 64 | 64 |

由极值的充分条件可知，函数 $f$ 在

$$(x_5, y_5),(x_6, y_6)(x_8, y_8)(x_9, y_9)$$

取局部极小值，其它点均为鞍点（非极值点）．

例 12（最小二乘法）设变量 $y$ 与 $x$ 之间的关系是 $y = ax+b$，其中 $a,b$ 是待定常数.现在通过实验测得了 $y$ 与 $x$ 的一组数据 $(x_1, y_1),(x_2, y_2),\ldots,(x_n, y_n)$，问如何由这一组数据得到最佳的待定常数 $a,b$．

（ $a=\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i{}^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}$， $b=\dfrac{(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i{}^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i)}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i{}^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}$ ）

### 13.2.4 多元函数的条件极值

问题一：$\begin{cases} Min\ f(x,y) \\ s.t.\quad F(x,y)=0 \end{cases}$.

解：引入拉格伦日函数: $L(x,y,\lambda)= f(x,y)+\lambda F(x,y)$,

问题二：$\begin{cases} Min\ f(x,y,z) \\ s.t.\quad F(x,y,z)=0; G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

做函数：$L(x,y,z,\lambda,\mu)= f(x,y,z)+\lambda F(x,y,z)+\mu G(x,y,z)$

例 13 今有 $m$ 个点 $P_i(a_i,b_i,c_i)$， $i=1,\cdots,m$，求点 $P(x,y,z)$，到各点距离平方之和最小。

问题：$Min\ f(\vec{x})=\sum\limits_{i=1}^{m}\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)$

求驻点：$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=2\sum\limits_{i=1}^{m}(x-x_i)=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=2\sum\limits_{i=1}^{m}(y-y_i)=0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=2\sum\limits_{i=1}^{m}(y-y_i)=0 \end{cases}$,　　$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i \end{pmatrix}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$

例 14 今有一空间曲面 $F(x,y,z)=0$ 及一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，在此曲面上找一点 $P(x,y,z)$ 到 $P_0$ 点距离最小。

问题：$\begin{cases} Min\ f(\vec{x})=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\ s.t.\quad F(x,y,z)=0 \end{cases}$

**拉格伦日函数：** $L(x,y,z,\lambda)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+\lambda F(x,y,z)$

$$=r+\lambda F(x,y,z)$$

其中，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ .

求驻点：$\begin{cases}\dfrac{\vec{r}}{r}+\lambda\ grad\,F(x,y,z)=0\\ F(x,y,z)=0\end{cases}$，$\begin{cases}\vec{r}_0(P_0P)=-\lambda\ grad\,F(x,y,z)\\ F(P)=0\end{cases}$

**例 15** 有一空间曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$及一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，在此曲线上找一点$P(x,y,z)$到

$P_0$点距离最小。

**问题：**$\begin{cases}Min\ f(\vec{x})=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\\ s.t.\quad F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0\end{cases}$

**拉格伦日函数：** $L(x,y,z,\lambda)=r+\lambda F(x,y,z)+\mu G(x,y,z)$

其中，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ .

求驻点：$\dfrac{\vec{r}}{r}+\lambda\ grad\,F(x,y,z)+\mu\ grad\,G(x,y,z)=0$ .

**13.3 综合例题**

**例 15** 通过曲面$S:e^{xyz}+x-y+z=3$上点$(1,0,1)$的切平面（　B　）

（$A$）通过$y$轴；　　（$B$）平行于$y$轴；

（$C$）垂直于$y$轴；　　（$D$）$A$，$B$，$C$都不对.

**例 16** 已知$f$可微，证明曲面$f(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置。

**例 17** 求曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2-2z-1=0,\\ x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0\end{cases}$在点$(1,1,2)$处的切线方程。

（切线方程为：$(x-1)-4(y-1)-5(z-2)=0$，即$x-4y-5z+13=0$）

**例 18** 求过$L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$且与曲面$2x^2-2y^2+2z=\dfrac{5}{8}$相切的平面的方程.

（切平面方程为 $6(x-3/2)+(y+1/4)+2(z+15/8)=0$）

**例 19** 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。　（点坐标为$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$．）

**例 20** 设$f(x,y,z),g(x,y,z)$都有连续的偏导数，$M(x_0,y_0,z_0)$是条件极值问题

$\begin{cases}\min(\max)\ f(x,y,z)\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$ 的解，且 $f(x_0,y_0,z_0)=a$ ．又设 $\pi_1,\pi_2$ 分别是曲面 $S_1: f(x,y,z)=a, S_2: g(x,y,z)=0$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面,则（ B ）

$A.$ $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 平行而不重合．　　$B.$ $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 重合．

$C.$ $\pi_1$，$\pi_2$ 垂直．　　$D.$ $\pi_1$，$\pi_2$ 既不重合也不平行．

例 20 设函数 $F(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有连续的二阶导数，且 $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}=0$，$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}>0$，$\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$．$y=y(x)$ 是 $F(x,y)=0$ 确定的隐函则：（ A ）

（$A.$）$y=y(x)$ 在点 $x_0$ 取极大值．　（$B.$）$y=y(x)$ 在点 $x_0$ 取极小值．

（$C$）$y=y(x)$ 在点 $x_0$ 没有极值．　（$D.$）不能确定 $y=y(x)$ 在点 $x_0$ 是否取极值．

例 21 设 $f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，在约束条件 $x-2y-2z=10$

下函数 $f(x,y,z)$ 条件最大极为 $f(M_0)$，又设在点 $M_0$ 处 $\frac{\partial f}{\partial x}=-2$，

则曲面 $f(x,y,z)=f(M_0)$ 在点 $M_0$ 处的一个法向量为（ $C$ ）

$A.(1,-2,-2)$　$B.(-2,1,1)$　$C.(-2,4,4)$　$D.(-1,2,2)$

例 22 设 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy$，求 $f(x,y)$ 的极值。（ 极值为 $\begin{cases}0\\-8\,.\\-8\end{cases}$）

例 23 在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大。　（ $x=p/2, y=3p/4$ ）

例 24 当 $x,y,z$ 都大于0时，求 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值．

并证明对任意正实数 $a,b,c$，下述不等式成立： $ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$。

例 25 设函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，在 D 内部偏导数存在，$z(x,y)$ 在 $D$ 的边界上的值为零，在 $D$ 内部满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 $f$ 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明 $z(x,y)\equiv 0\ ((x,y)\in D)$．