基础部分

第二课　微积分

第 1 章 常微分方程（二）　高阶线性方程

（一）线性方程解的结构
（二）高阶线性常系数齐次方程的解
（三）高阶线性常系数非齐次方程的解
（四）Euler 方程
（五）差分方程介绍
（六）综合例题

10.1 高阶线性方程及其解的结构

10.1.1 高阶线性方程及其特点

（1）n 阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+....+a_{n-1}(t)\frac{d\ x}{dt}+a_n(t)x=f(t)$$

方程齐次方程：

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+....+a_{n-1}(t)\frac{d\ x}{dt}+a_n(t)x=0$$

记：k 阶导数符号 $D^k=\frac{d^k}{dt^k}$，及多项式微分算子：

$$L(D)=D^n+a_1(t)D^{n-1}+a_2(t)D^{n-2}+....+a_n(t)\ ,$$

　　n 阶线性齐次微分方程可表成：

$$L(D)x=0$$

　　n 阶线性非齐次微分方程可表成：

$$L(D)x=f(t)$$

（2）多项式微分算子微分的线性性：
　　易于验证，

$$\forall\alpha,\beta\in R\ \ ,L(D)\big(\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)\big)=\alpha L(D)\big(y_1(x)\big)+\beta L(D)\big(y_2(x)\big)。$$

（3）对于 n 阶线性微分方程解的存在唯一性定理：

定理：设方程 $L(D)x=f(t)$ 中的系数 $a_i(t)(i=1,2,...,n)$ 以及非齐次项 $f(t)$ 都是区间 I 上的已知连续函数，$t_0\in I$．则对于任意一组实数 $\xi_0,\xi_1,..,\xi_{n-1}$,方程满足初值条件：

$$x(t_0)=\xi_0,x\ \ (t_0)=\xi_1,...,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1}$$

的解在区间 I 上存在唯一。

例 1 判断下列方程中哪些是线性方程，

（i）$y''+x\ \ \ y'+2y=\sin x$；

（ii） $y''+x\ y'+2y=\sin y$ ；

（iii） $y''+x^2 y'=|1-x|y$ ；

（iv） $y''+x^2 y'=|1-x|\sqrt{y}$。

10.1.2 线性方程解的结构

(1) 函数的线性相关性：

定义： 在区间(a,b)上的n个函数$x_i(t),\ i=1,\cdots,n$线性相关，是指存在n个不全为零的常数$c_i,\ i=1,\cdots,n$，使得$\forall x\in(a,b),\ \sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t)=0$;否则称$x_i(t),\ i=1,\cdots,n$为线性无关.

例如： 设$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in R$互不相等，则函数$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\dots,e^{\lambda_m t}$在任意区间$I$上线性无关.

又如， 函数：$\sin 2x,\ \cos 2x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$是线性相关的，因为

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x .$$

(2) 线性方程解的结构：

1）若$x_1(t),x_2(t)$都是方程$L(D)x=0$的解,则对任意常数c_1,c_2,函数$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是该方程的解.

2）方程$L(D)x=0$的所有解构成一个n维线性空间，其中任意n个线性无关的解，$x_i(t),\ i=1,\cdots,n$，构成该空间的一组基。

3）非齐次方程$L(D)x=f(t)$之解：

非齐次方程$L(D)x=f(t)$任意两个解之差是齐次方程$L(D)x=0$的解；因此，如果已知方程$L(D)x=f(t)$有一个特解$X(t)$，那么它的每个解都可以表示为 $x(t)=X(t)+\overline{x}(t)$，其中$\overline{x}(t)$是齐次方程$L(D)x=0$的解.

例 2 求方程 $x''+\omega^2x=a$ 之通解。

解：与之相应的齐次方程为 $x''+\omega^2x=0$。

不难验证,当$\omega\neq 0$时,$\sin\omega\ t,\cos\omega\ t$是齐次方程的两个线性无关解；$\frac{a}{\omega^2}$是非齐次方程的一个特解。

因此，齐次方程的通解是 $x(t)=c_1\sin\omega\ t+c_2\cos\omega\ t$.

非齐次方程的通解为$y(t)=c_1\sin\omega\ t+c_2\cos\omega\ t+\frac{a}{\omega^2}$.

当 $\omega=0$ 时，1，t 是齐次方程的两个线性无关解；$\frac{a}{2}t^2$ 是非齐次方程的一个特解.

因此，齐次方程的通解是 $x(t)=c_1+c_2\quad t$.

非齐次方程的通解为 $y(t)=c_1+c_2\quad t+\frac{a}{2}t^2$ 。

(3) 线性方程求解的基本方法：观察待定法。

设有二阶齐次方程：$L(D)y=y''+p(x)y'+q(x)y=0$,

- 若己知二阶齐次方程 $L(D)y=0$ 的一个特解 $y_1(x)$，用变动任意常数法，设 $y_2(x)=c(x)y_1(x)$，代入方程 可求出另一个无关特解。
- 若己知二阶齐次方程 $L(D)y=0$ 的二个无关特解，$y_1(x),y_2(x)$，用变动任意常数法，设 $Y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$，代入方程，可求出非齐次方程 $L(D)y=f(t)$ 的一个特解。

例 3 $xy''+xy'-y=0$ 。

一般解是：$y=c_1x+c_2x\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$ 。

例 4 解方程 $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$

解：变动任意常数法.

齐次一般解为：$y=c_1x+c_2(1+x^2)$

观察待定法：有解 $y_1=x$； $y_2=x^2+1$,

从而齐次一般解为：$y=c_1x+c_2(1+x^2)$ 。

例 5 解方程 $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=1-x^2$,

解：变动任意常数法：令 $Y=y_1(x)C_1(x)y+y_2(x)C_2(x)$,

$$\Rightarrow Y=\frac{x}{2}\ln\left(1-x^2\right)+\left(x^2+1\right)\left[\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{x^2}{2}\right].$$

10.2 高阶线性常系数齐次方程的解

考察 n 阶线性常系数齐次方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+....+a_{n-1}\frac{d\ x}{dt}+a_nx=0$$

其中 $a_1,\dots,a_n$ 为实常数.　　或记成 $L(D)x=0$

由上面的讨论知道，$L(D)x=0$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 有 n 个线性无关解，

通解是这些解的线性组合。

11.2.1 特征方程：

(1) 微分方程 $L(D)x=0$ 的特征方程

$$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

特征方程的根称为特征根.

(2) 特征根与方程 $L(D)x=0$ 解的对应关系.

微分方程：$L_2(D)x=y''+ay'+by=0$

特征方程：$L_2(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b=0$

1）λ_1,λ_2 是特征方程 $L_2(\lambda)=0$ 的不等实根，则

$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t}$ 是方程 $L_2(D)x=0$ 的两个无关解.

2）$\lambda_1=\lambda_2$ 是特征方程 $L_2(\lambda)=0$ 的重根；则

$e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t}$ 是方程 $L_2(D)x=0$ 的两个无关解.

3）$\lambda=\alpha\pm i\beta$ 是特征方程 $L_2(\lambda)=0$ 的一对共轭复根，则

$e^{\alpha t}Cos\quad t,e^{\alpha t}Sin\quad t$ 是方程 $L_2(D)x=0$ 的两个无关解.

其中用到结果：

- 设 $z(t)=u(t)+iv(t)$ ，定义它的导数为 $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{du}{dt}+i\dfrac{dv}{dt}$.

如果复值函数 $z(t)=u(t)+iv(t)$ 是齐次方程 $L(D)x=0$ 的解，则实部 $u(t)$ 和虚部 $v(t)$ 都是 $L(D)x=0$ 的实解.

- 欧拉公式：$e^{\lambda t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+\sin\beta t)$

11.2.2 n 阶方程 $L_n(D)x=0$ 特征根与解的对应：

对 n 阶方程 $L_n(D)x=0$

1）设 λ 是特征方程 $L_n(\lambda)=0$ 的实根，则 $e^{\lambda t}$ 是 $L_n(D)x=0$ 的实解.

2）设 $\alpha\pm i\beta$ 是特征方程的一对单重复根，

则 $e^{\alpha t}\cos\beta t,e^{\alpha t}\sin\beta t$ 是方程 $L_n(D)x=0$ 的两个无关实解.

3）设 λ 是特征方程的 $k(1<k\le n)$ 重实根，

则 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ 是方程 $L_n\left(D\right)x=0$ 的 k 个无关实解.

4）设 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的一对 $k(1<2k\le n)$ 重复根，

则

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

是方程 $L_n\left(D\right)x=0$ 的 $2k$ 个无关实解.

由此可知：对应特征方程 $L_n\left(\lambda\right)=0$ 的 n 个根，包括重根，均能得到方程 $L_n\left(D\right)x=0$ 的 n 个线性无关解.

例 6 设 μ 为实数，求方程 $x''+\mu x=0$ 的通解.

解： 特征方程为 $\lambda^2+\mu=0$.

1）. $\mu>0$ ，通解为 $c_1\cos\sqrt{\mu}t+c_2\sin\sqrt{\mu}t(c_1,c_2\in R)$.

2）. $\mu=0$ ，方程为 $x(t)=c_1+c_2t$.

3）. $\mu<0$ 时，通解为 $x\left(t\right)=c_1e^{\sqrt{-\mu}\ t}c_2e^{-\sqrt{-\mu}\ t}$.

例 7 求方程 $x^{(4)}-x=0$ 的通解.

解： 通解为

$$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t .$$

例 8 求方程 $x'''-3x''+3x-x=0$ 通解.

解： 通解为 $x\left(t\right)=c_1e^t+c_2t\ \ e^t+c_3t^2e^t=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^t$.

例 9 求方程 $x^{(4)}+2x''+x=0$ 通解.

解： 通解为 $x(t)=(c_1+c_3t)\cos t+(c_2+c_4t)\ \sin t$.

10.3 高阶线性常系数非齐次方程的解

10.3.1 线性常系数非齐次方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t)$$

其中 $a_1,\dots,a_n$ 为实常数，$f(t)$ 是已知连续函数.

一般解是： $x\left(t\right)=\overline{x}\left(t\right)+Y\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\left(t\right)+Y\left(t\right)$

10.3.2 $L_n(D)x = P(t)e^{\alpha t}$ 型方程的求解

二解线性常系数方程 $L_2(D)x = \frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t)$

假定右端函数具有形式 $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$， $P(t)$ 是 t 的一个多项式.假

定方程有一个形如 $x(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ 的解，其中 $Q(t)$ 是 t 的一个多项式.

问题是确定 $Q(t)$ 的次数和系数. 根据解的概念 ，将 $x(t) = Q(t)e^{\alpha t}$

代入方程 $L_2(D)x = P(t)e^{\alpha t}$,得

$$Q''(t) + (2\alpha + a)Q'(t) + (\alpha^2 + a\alpha + b)Q(t) = P(t) \qquad (*)$$

下面分三种情形讨论.

（1）当 α 不是特征根时，$Q(t)$ 与 $P(t)$ 次数相同.

（2）当 α 是特征根，但非重根时，$Q(t) = tR(t)$， $R(t)$ 是一个次数与 $P(t)$ 相同的多项式.

（3）当 α 是特征重根时，$Q(t) = t^2R(t)$.

例 10 求方程 $x'' + x' = 2t^2 + 1$ 的通解.

解：找方程形如 $x_0(t) = t(a\ t^2 + bt + c)e^{0t} = at^3 + bt^2 + ct$ 的特解.代

入原方程得到 $3at^2 + (2b + 6a)t + (c + 2b) = 2t^2 - 3$

比较系数得到 $3a = 2, 2b + 6a = 0, c + 2b = -3$.

原方程的一个特解 $x_0(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t$.

所以方程通解为 $x(t) = c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t$.

例 11 解方程 $x'' - 2x' + x = 4te^t$.

解：原方程的通解为 $x(t) = (c_1 + c_2t)e^t + \frac{2}{3}t^3e^t$.

例 12 解方程 $x'' - x = 4\cos t$.

解：通解为 $x = c_1e^t + c_2e^{-t} - 2\cos t$.

例 13 求方程 $x'' + \omega x = H\sin\beta\ t$ 的通解其中 H, ω, β 为常数.

解：此方程对应的齐次方程 $x\ + \omega^2 x = 0$ 的通解为

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t .$$

1．若 $\beta \neq \omega$， $x(t) = c_1\cos\omega t + c_2 \sin\omega t + \dfrac{H}{\omega^2+\beta^2}\sin\beta t$.

2．若 $\beta = \omega$，则 $i\beta$ 是特征根，并且是单重根,从而方程通解是

$$x(t) = (c_1 - \frac{H}{2\omega}t)\cos\omega t + c_2 \sin\omega t .$$

例 14 求方程 $x'' - x = t^2 + 1 + te^{2t}$ 的一个特解.

解： $y = y_1 + y_2 = -t^2 - 2 + (\frac{t}{3} - \frac{4}{9})e^{2t}$.

10.4 Euler 方程

形如 $$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}t\frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

的方程称为 Euler(欧拉)方程.其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为常数.对于这种方程，

应当分别考虑 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的情形．作代换 $s = \ln|t|$ 可以将上述方程

化为未知函数 $x = x(s)$ 的常系数方程.

例 15 解方程 $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2t\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$.

解： 令 $s = \ln|t|$,原方程即可以将其化为 $\dfrac{d^2x}{ds^2} + \dfrac{dx}{ds} + 2x = 0$.

$$x(t) = |t|^{-\frac{1}{2}}(c_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|t| + c_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|t|) .$$

例 16 求微分方程 $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^2 \ln x$ 的通解。

解： 原微分方程为二阶欧拉方程，当 $x > 0$ 时，令 $x = e^t$，

所以原微分方程化为 $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = e^{2t}t$,

因此非齐次方程的通解为 $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} - \dfrac{1}{2}t(t+2)e^{2t}$,

最后得到欧拉微分方程的通解为 $y = C_1x^2 + C_2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2(\ln x + 2)\ln x$ 。

10.5 差分方程介绍

（一）线性常系数差分方程

设未知数列 y_n ，$n = 0.1, 2, \cdots$,则

(1) $a_n y_{n+1} + b_n y_n = f_n$,若 $f_n \neq 0$,称为一阶线性非齐次差分方程;

$a_n y_{n+1} + b_n y_n = 0$ ，称为一阶线性齐次差分方程，

若 $a_n = a,\ b_n = b$ 为常数，则称为一阶常系数线性齐次差分方程.

(2) $a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n = f_n$ ，若 $f_n \neq 0$ ，

称为二阶线性非齐次差分方程;

$a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n = 0$ ，称为二阶线性齐次差分方程，

若 $a_n = a,\ b_n = b, c_n = c$ 为常数，则称为二阶常系数线性齐次差分方程.

差分方程初始值问题：$\begin{cases} a_n y_{n+1} + b_n y_n = f_n \\ y_0 = \alpha \end{cases}$, $\begin{cases} a_n y_{n+2} + b_n y_{n+1} + c_n = f_n \\ y_0 = \alpha,\ y_1 = \beta \end{cases}$.

(3) 差分方程的解：使差分方程成为关于 n 的恒等式的数列 y_n , $n = 0.1, 2, \cdots$ 称为相应差分方程之解。与微分方程类似，也有通解特解之说。

特别是对线性差分方程，有完全类似于线性微分方程解的结构理论。

(二) 一、二阶线性常系数齐次差分方程的解法

(1) 一阶方程：$\begin{cases} y_{n+1} - p y_n = 0 \\ y_0 = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = p y_n \\ y_0 = y_0 \end{cases} \Rightarrow y_n = p^n y_0$.

(2) 二阶方程：$\begin{cases} y_{n+2} + p y_{n+1} + q = 0 \\ y_0 = y_0,\ y_1 = y_1 \end{cases}$.令 $y_k = \lambda^k$ ，代入方程，得特征方程：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ，设有二根 λ_1, λ_2 ，则一般解：

$$y_n = c_1 \lambda_1^{\ n} + c_2 \lambda_2^{\ n} .$$

例 17 解差分方程 $\begin{cases} 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0 \\ x_0 = 1/2 ,\ x_1 = 13/20 \end{cases}$.

解：特征方程，$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1/2 ,\ \lambda_2 = 1$,则一般解：$y_n = c_1 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + c_2$ ，由初始条件确定常数，得特解： $y_n = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

10.6 综合例题

例 18 设 $y_1(x)$ ，$y_2(x)$ 是二阶线性齐次微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个特解.问能够由 $y_1(x)$ ，$y_2(x)$ 的线性组合构成该方程的解的充分必要条件为 (B)

$A.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_2(x)\cdot y_1'(x)=0$　　$B.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)-y_2(x)\cdot y_1'(x)\neq 0$

$C.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)+y_2(x)\cdot y_1'(x)=0$　　$D.\ y_1(x)\cdot y_2'(x)+y_2(x)\cdot y_1'(x)\neq 0$

例 19 设函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是二阶线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的三个不同特解，且 $\dfrac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_4(x)}\neq C$，则该微分方程的通解为________。

解：通解为 $y=y_1(x)+C_1\left[y_2(x)-y_1(x)\right]+C_2\left[y_3(x)-y_1(x)\right]$.

例 20 已知函数 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性常系数非齐次微分方程的三个解，则此微分方程为 _____ 。

（ $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$ ）。

例 21 求定解问题 $\begin{cases} y''+4y'+4y=\cos 2x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ 的解。

解：非齐次方程的通解 $Y=\overline{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{8}\sin 2x$

$$Y=-\frac{x}{4}e^{-2x}+\frac{1}{8}\sin 2x\text{。}$$

例 22 振荡问题讨论，质量为 m 的质点挂在在弹簧上，弹性力与位移成正比，比例系数为 $k>0$；力阻力与速度成正比，比例系数为 $\mu\geq 0$；所受外力为 $f(t)$，则运动满足微分方程及条件，

$$\begin{cases} mx''=-cx'-kx+f(t) \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''+\dfrac{c}{m}x'+\dfrac{k}{m}x=\dfrac{1}{m}f(t) \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=v \end{cases}.$$

研究运动规律。

解：为方便计，设 $\mu=\dfrac{c}{2m}$，$\omega^2=\dfrac{k}{m}$，$F(t)=\dfrac{1}{m}f(t)$，则有

原方程 $\Rightarrow \begin{cases} x''+2\mu x'+\omega^2 x=F(t) \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=v \end{cases}$ （*）

特征方程：$\lambda^2+2\mu\ \ \lambda+\omega^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-\mu\pm\sqrt{\mu^2-\omega^2}$.

$$\sqrt{\left|\mu^2-\omega^2\right|}=q$$

（1） $\mu\geq\omega$，$\lambda_1=-\mu+q\leq 0,\quad \lambda_2=-\mu-q<0$

（2） $\mu<\omega$，$\lambda_1=-\mu\pm q\quad i\leq 0$.

例 23 设 $y_1 = 3 + x^2$，$y_2 = 3 + x^2 + e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解，且相应齐次方程的一个解为 $y_3 = x$，则该微分方程的通解为 $\underline{y = 3 + x^2 + C_1 x + C_2 e^{-x}}$。

例 24 具有特解 $y_1 = e^{-x}$，$y_2 = 2xe^{-x}$，$y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程是(　　)

$A.\ y''' - y'' - y' + y = 0$　　　$B.\ y''' + y'' - y' - y = 0$

$C.\ y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$　　　$D.\ y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

例 25 若某二阶线性非齐次微分方程的两个解为 $3 + x^2$，$e^{-x} + 3 + x^2$，且相应齐次方程的一个解为 x，则该非齐次方程的通解为 $\underline{3 + x^2 + C_1 x + C_2 e^{-x}}$.

例 26 设有二阶线性常系数齐次微分方程 $y'' + ay' + y = 0$，其中 $a \ge 0$，则此方程的解(　A　)。

（A）在 $(0, +\infty)$ 上都有界。

（B）在 $(0, +\infty)$ 上既有有界，也有无界。

（C）当 $0 \le a \le 2$ 时在上都有界，当 $a > 2$ 时在 $(0, +\infty)$ 上存在无界的。

（D）当 $0 \le a < 2$ 时在 $(0, +\infty)$ 上存在无界的，当 $a \ge 2$ 时在 $(0, +\infty)$ 上都有界。

例 27 微分方程 $y'' - 2y' - 3y = x + xe^{-x} + e^{3x}\sin x$ 的一个特解形式为 ________ 。

解：$y^* = y_1 + y_2 + y_3 = Ax + b + x(Cx + D)e^{-x} + xe^{3x}(E\sin x + F\cos x)$。

例 28 设 $y_1 = e^{-x}$，$y_2 = 2x$ 是三阶线性齐次常系数微分方程 $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ 的两个解. 则 a, b, c 的值分别为(　B　)

$A.\ a = 2$，$b = 1$，$c = 0$　　　$B.\ a = 1$，$b = 0$，$c = 0$

$C.\ a = 1$，$b = 0$，$c = 1$　　　$D.\ a = -1$，$b = 0$，$c = 0$

例 29 设参数 $\delta \in R$，$P_m(t)$ 为 m 次实系数多项式。函数 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 分别满足如下微分方程

(A) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = P_m(t)\ e^{-\delta t}\sin t$；　(B) $\dfrac{dy}{dt} + y = x^2(t)$

(1) 问当δ满足什么条件时，对方程(A)的任意解$x(t)$有$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$

(2) 问当δ满足什么条件时，对方程(B)的任意解$y(t)$有$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=0$

例 30 设 $f(x)=x\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$

（ $f(x)=\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{3}{4}x\sin x$.）

例 31 设 $y=y(x)$ 是二阶线性常系数非齐次微分方程 $y''+2y'+y=e^{3x}$ 满足条件 $y'(0)=y(0)=0$ 的解，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ （　　　　）。　　答案（C）。

(A)不存在 ，(B)等于 1，(C)等于 2，(D)等于 3.

例 32 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

(1)　试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2)　求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解。

（ 所求初值问题的解为 $y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$。）